



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**

**LICENCIATURA EM FÍSICA**

**INSTITUTO DE FÍSICA**

**MONOGRAFIA DE FINAL DE CURSO**

**UM ESTUDO DE OSCILADORES PARA O  
ENSINO MÉDIO COM VÍDEOS DIDÁTICOS**

Fabio Soares Pinheiro

*ORIENTADOR*

Dra. Maria Antonieta Teixeira de Almeida

Monografia de final de curso, apresentada ao Curso de Licenciatura em Física, do Instituto de Física – UFRJ, como pré-requisito para obtenção do título de Graduado em Licenciatura em Física.

Aprovada por:

Presidente, Dra. Maria Antonieta Teixeira de Almeida

Prof. Vitorvani Soares

Prof. Alexandre Carlos Tort

Prof. Andreia Guerra de Moraes

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos que acreditamos na EDUCAÇÃO.

Dedico este trabalho aos educadores que dedicam seus mais preciosos esforços para construir  
uma sociedade mais justa e mais feliz.

Dedico este trabalho aos seres humanos que buscam em suas jornadas diárias respostas e  
meios para um mundo melhor para todos.

## AGRADECIMENTOS

Expresso minha mais **PROFUNDA GRATIDÃO** a um MESTRE em especial: professora Maria Antonieta Teixeira de Almeida. Professora, muito obrigado pela paciência para conversar e me mostrar meus erros e minhas imperfeições. Muito obrigado pelo carinho com que me recebeu no LADIF. Muito obrigado pelas experientes palavras de orientação nas horas em que mais precisei. Muito obrigado por sua dedicação e seu comprometimento com o ensino de Física que me servem de inspiração e de exemplo. Muito obrigado principalmente por existir e fazer da minha vida de estudante um caminho de grande aprendizado e amadurecimento. Professora, muito obrigado por me proporcionar meios para uma transformação interna indescritível, mas perceptível para meus amigos e alunos. A você professora Maria Antonieta Teixeira de Almeida, **GRATIDÃO ETERNA**.

Meus mais profundos e sinceros agradecimentos se dirigem também aos MESTRES que marcaram minha vida para sempre: professor Altair, professor Róbson Ferreira, professor Radamanto, professor Vitorvani Soares, professor Carlos Eduardo Aguiar, professor Paulo André e professor Rodrigo Rosistolato.

Agradeço aos meus familiares, em especial a meu avô paterno Ruy Martins Pinheiro pelo amor e pela orientação e a meu irmão Carlos Eduardo Soares Pinheiro por seu companheirismo e bom humor.

Agradeço a todos meus amigos, em especial ao Márcio Roberto de Oliveira Júnior.

Agradecimento em especial a duas pessoas importantes na minha caminhada: Vicente Carnero e Rudi Luiz Reali.

Agradecimento aos companheiros do LADIF, em especial a Agostinho Mendes da Cunha e Rulian de Almeida pelo auxílio nas filmagens. E ao prof. Hélio Salim pelo auxílio na utilização dos aplicativos.

## EPÍGRAFE

“O AMOR, O TRABALHO E O CONHECIMENTO SÃO AS FONTES DE NOSSA VIDA.  
DEVERIAM TAMBÉM GOVERNÁ-LA.”

WILHELM REICH

## **RESUMO**

### **UM ESTUDO DE OSCILADORES PARA O ENSINO MÉDIO COM VÍDEOS DIDÁTICOS**

Fabio Soares Pinheiro

#### *ORIENTADOR*

Dra. Maria Antonieta Teixeira de Almeida

Resumo da Monografia de Final de Curso, apresentada ao Curso de Licenciatura em Física, do Instituto de Física – UFRJ, como pré-requisito para obtenção do título de Graduado em Licenciatura em Física.

Os osciladores acoplados não são abordados no Ensino Médio porque necessitam do conhecimento de equações diferenciais. As equações diferenciais não fazem parte do currículo do Ensino Médio. Fizemos um estudo que utiliza vídeos didáticos, os aplicativos livres VirtualDub, ImageJ e o aplicativo Microsoft Excel, para ensinar de forma semi-quantitativa, os osciladores harmônicos acoplados sem as equações diferenciais. Utilizamos para isto, o vídeo “Oscilações” [1] desenvolvido anteriormente no LADIF e os vídeos “Pêndulos acoplados” [2] e “Osciladores forçados” [3] que nós produzimos para este estudo. É possível observar no vídeo “Pêndulos acoplados” que eles não realizam, em geral, um movimento harmônico simples (MHS). Todavia, existem pelos menos duas formas de iniciar o movimento dos pêndulos acoplados onde eles realizam movimentos harmônicos simples (modos normais de oscilação). Mostramos também que o movimento geral dos pêndulos acoplados pode ser obtido somando-se as funções que descrevem os modos normais de oscilação dos pêndulos. A possibilidade de se visualizar os modos normais de osciladores acoplados com oscilações forçadas foi apresentada nos vídeos “Pêndulos acoplados” e “Osciladores forçados”. E finalmente, relacionamos de forma superficial o conteúdo desenvolvido à qualidade do som conhecida como timbre.

## SUMÁRIO

|                                                |    |
|------------------------------------------------|----|
| INTRODUÇÃO                                     | 7  |
| CAPÍTULO 1 - MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (MHS) | 9  |
| 1.1. EQUILÍBRIO ESTÁVEL. FORÇA RESTAURADORA    | 9  |
| 1.2. PÊNDULO SIMPLES                           | 10 |
| 1.3. SISTEMA MOLA-MASSA-MOLA                   | 27 |
| CAPÍTULO 2 – MODOS NORMAIS DE OSCILAÇÃO        | 30 |
| 2.1. PÊNDULOS ACOPLADOS                        | 30 |
| 2.2. SISTEMA MASSA-MOLA ACOPLADO               | 42 |
| CAPÍTULO 3 – APLICAÇÕES                        | 46 |
| 3.1. INSTRUMENTOS MUSICAIS DE CORDA: TIMBRE    | 46 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS                           | 47 |
| REFERÊNCIAS                                    | 48 |
| APÊNDICE 1 – MHS                               |    |
| APÊNDICE 2 – MODOS NORMAIS DE OSCILAÇÃO        |    |
| APÊNDICE 3 – RESSONÂNCIA                       |    |
| APÊNDICE 4 - TABELA DE DADOS                   |    |

## INTRODUÇÃO

A nossa sociedade atual tem como uma de suas bases principais a utilização da tecnologia. Por isto, qualquer cidadão precisa se familiarizar com a Ciência para entender e atuar no mundo em que vive. A maioria das pessoas só tem contato com as ciências no Ensino Médio e no Ensino Fundamental onde a construção dos modelos científicos é dificultada pela falta de formação matemática dos estudantes e pela ausência de bons laboratórios nas escolas. Por isto, foram desenvolvidos materiais didáticos tais como vídeos e aplicativos para ajudar no ensino de ciências destes seguimentos. A rede mundial de computadores apresenta uma quantidade apreciável destes materiais.

Um fenômeno importante no nosso cotidiano é o som. Através das ondas sonoras podemos nos comunicar, falar e ouvir a pequenas e longas distâncias por rádios e telefones. Podemos realizar procedimentos na medicina como a ultrassonografia, dentre outros. A música e seus instrumentos, como o violão, o teclado ou a voz, se baseiam nas propriedades do som. Por isto, nessa monografia apresentamos uma proposta para o ensino de osciladores que permite uma compreensão qualitativa de uma qualidade importante do som, conhecida como timbre. Esta qualidade nos permite explicar a diferença entre uma nota tocada em um violão e a mesma nota tocada em um teclado, por exemplo. Utilizamos para isto, vídeos e os aplicativos VirtualDub, ImageJ e Microsoft Excel. Os vídeos utilizados foram “Oscilações” [1], “Pêndulos Acoplados” [2] e “Oscilações forçadas” [3]. O vídeo “Oscilações” foi produzido no LADIF (Lab. Didático do Instituto de Física) em 2000 com a finalidade de resolver o problema do pêndulo simples experimentalmente [4], os outros dois são de nossa autoria.

No primeiro capítulo vamos desenvolver as bases do movimento harmônico simples (MHS). Com esta finalidade, lembraremos como é possível se obter a solução do pêndulo simples experimentalmente utilizando o vídeo “Oscilações”. Com uma analogia entre as equações do pêndulo simples e do sistema massa-mola obtidas através das Leis de Newton, encontraremos as soluções do último.

No segundo capítulo encontraremos as equações que descrevem o movimento de dois pêndulos acoplados por uma mola aplicando as Leis de Newton aos pêndulos. Com o vídeo “Pêndulos Acoplados” mostraremos algumas propriedades das soluções deste sistema. Entre

elas, a existência de modos normais de oscilação e de movimentos oscilatórios com amplitude máxima variável. Com os programas VirtualDub, ImageJ e Microsoft Excel obteremos o gráfico do deslocamento horizontal de um dos pêndulos com o tempo e mostraremos que ele pode ser obtido a partir da soma das funções que descrevem os modos normais dos pêndulos. Aplicaremos as Leis de Newton ao sistema de duas massas acopladas horizontalmente que oscilam na vertical e mostraremos que as equações deste sistema são análogas às equações dos pêndulos acoplados. Desta forma todos os resultados obtidos para os pêndulos acoplados podem se transferidos para o sistema formado por duas massas acopladas por molas.

Finalmente, no terceiro capítulo vamos aplicar o conteúdo dos outros capítulos para tentarmos explicar o timbre.

Nos [APÊNDICE 1], [APÊNDICE 2] e [APÊNDICE 3] foram disponibilizadas as resoluções dos problemas apresentados no texto através das equações diferenciais. E no [APÊNDICE 4] disponibilizamos a tabela de dados usada para obter o gráfico da posição dos pêndulos acoplados em função do tempo.

## CAPÍTULO 1 – MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (MHS)

### 1.1. EQUILÍBRIO ESTÁVEL. FORÇA RESTAURADORA

As crianças se divertem com um brinquedo chamado João Bobo (Fig.1), que quando deslocado de sua posição de repouso vertical, tende a retornar para mesma. E permanece oscilando em torno dessa posição, como se uma força sempre o puxasse de volta.



Fig.1 – João Bobo.

Dizemos que um corpo está em equilíbrio quando ele não se desloca nem gira, isto é quando ele está parado. Quando um corpo retorna à sua posição de equilíbrio após um deslocamento, dizemos que ele está em **equilíbrio estável**. Isto ocorre porque atuam sobre o corpo forças que tendem a levá-lo de volta à sua posição de equilíbrio. Estas forças são denominadas **forças restauradoras**. Os corpos que estão em posições de equilíbrio estável oscilam como o João Bobo em torno da sua posição de equilíbrio. Eles são denominados **osciladores**. Iniciaremos nosso estudo sobre osciladores com o problema do pêndulo simples.

## 1.2. PÊNDULO SIMPLES

Pêndulo simples é um sistema formado por um fio inextensível de comprimento  $l$  e massa desprezível e uma partícula de massa  $m$ . A partícula está ligada em uma das extremidades do fio e a outra está pendurada em um suporte (Fig.2). A massa possui uma posição de equilíbrio estável, ponto mais baixo da trajetória (Fig.2). Assim, quando deslocada dessa posição oscila em torno da vertical que passa pelo ponto, semelhante ao João Bobo.

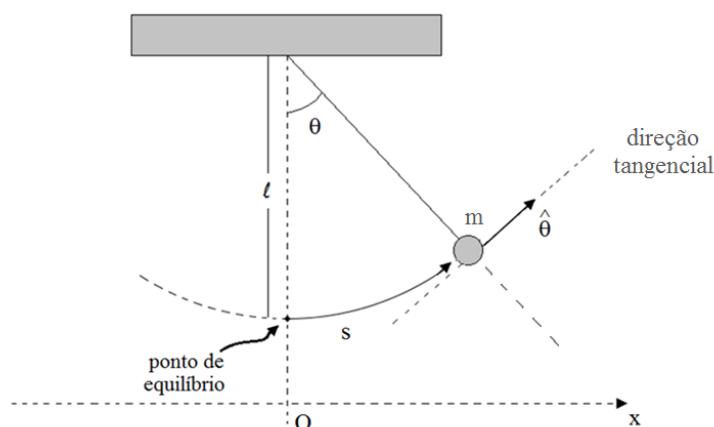


Fig.2 – Pêndulo simples. Eixos principais de análise.

Um corpo pendurado por um fio se comporta como pêndulo simples quando a massa do fio é muito menor que a massa do corpo e as dimensões do corpo são muito menores que o comprimento do fio.

Para resolvermos o problema do pêndulo simples é necessário obtermos a sua posição como função do tempo. Podemos localizar o pêndulo com o ângulo  $\theta(t)$  ou com o comprimento do arco  $s(t)$  representados na Fig.2.

Como no pêndulo simples a massa é considerada uma partícula a força de resistência do ar não é considerada no problema. Assim, as únicas forças que atuam na massa são a força-peso ( $\vec{P}$ ) e a tensão ( $\vec{T}$ ). Para aplicar a Segunda Lei de Newton vamos isolar a massa e colocar as forças que atuam nela (Fig.3).

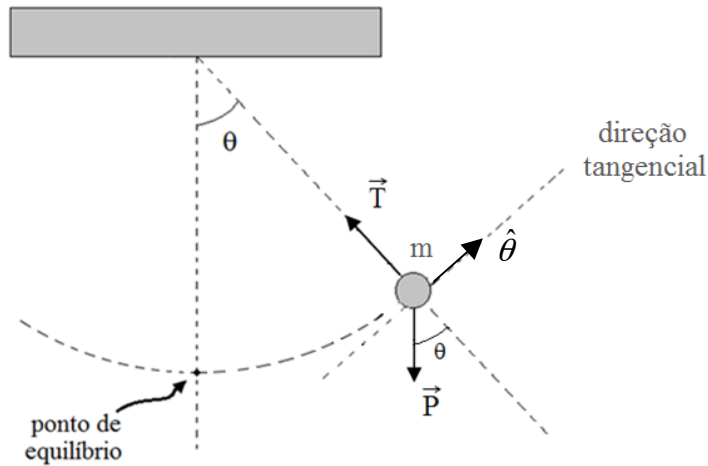


Fig.3 – Diagrama de forças.

Com efeito, temos a equação

$$\vec{T} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}.$$

O diagrama de forças mostra que a força restauradora nesse caso é a componente tangencial da força-peso, dado que esta componente tende a deslocar a massa para o ponto de equilíbrio. Como a componente da tensão na direção do vetor unitário  $\hat{\theta}$  é nula, a Segunda Lei nesta direção nos fornece

$$\begin{aligned} P_{\theta} &= m \cdot a_{\theta} \\ -m \cdot g \cdot \text{sen } \theta &= m \cdot a_{\theta} \end{aligned}$$

logo, a aceleração tangencial é dada por

$$a_{\theta} = -g \cdot \text{sen } \theta \quad (1).$$

A expressão (1) mostra que a aceleração do pêndulo não é constante, ela depende do valor de  $\theta$ , ou seja, se modifica para cada posição do pêndulo.

A variação da aceleração com o ângulo  $\theta$  fica mais clara quando analisamos o gráfico da função trigonométrica  $\text{sen } \theta$  representado na (Fig.4).

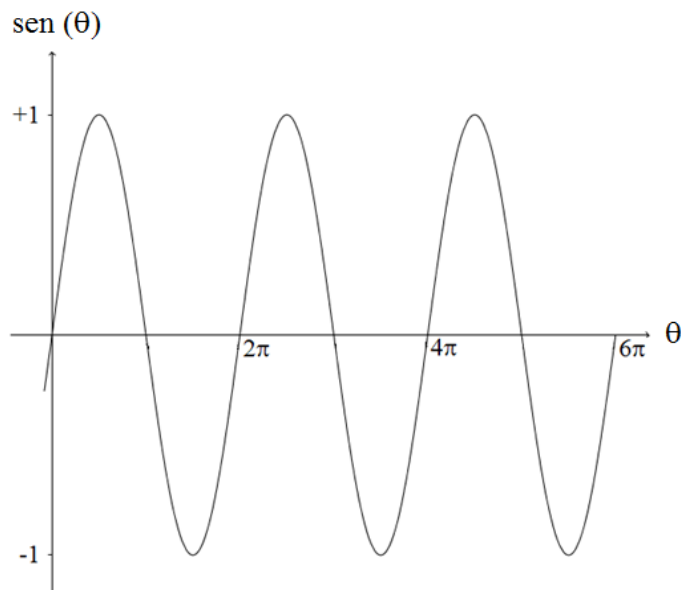


Fig.4 – Gráfico da função seno.

A função  $\text{sen } \theta$  é periódica, isto é, ela se repete em intervalos angulares iguais e fixos. Ao percorrermos no eixo  $\theta$  um intervalo de  $2\pi$  radianos (*rad*) notamos que a função começa a se repetir. O menor intervalo para a repetição chama-se período, portanto, a função  $\text{sen } \theta$  é periódica e seu período é  $2\pi \text{ rad}$ . Vemos também que a função somente assume valores (imagem da função) no intervalo fechado  $[-1, +1]$ . No caso do pêndulo simples (Fig.2) o ângulo  $\theta$  assume valores (domínio da função) no intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ .

A solução do problema do pêndulo é mais complicada do que a solução dos problemas com aceleração constante estudados anteriormente (movimentos retilíneos uniforme e uniformemente variados e o movimento dos projéteis). Nesses casos conseguimos obter todas as equações das posições e velocidades das partículas em função do tempo com manipulações matemáticas compreensíveis para alunos do Ensino Médio. No caso do pêndulo, as soluções são obtidas utilizando equações diferenciais que fazem parte do conteúdo das disciplinas de Matemática dos cursos de Ensino Superior. Estas soluções não são compreensíveis para alunos do Ensino Médio.

A resolução de problemas mais complicados no Ensino Médio pode ser obtida de forma aproximada utilizando-se vídeos e/ou aplicativos. Existem vários trabalhos que

mostram como o problema do pêndulo simples [4] pode ser resolvido desta forma. Nesta monografia escolhemos para discutir a solução do pêndulo simples o vídeo "Oscilações" porque a metodologia utilizada é semelhante a que adotamos no vídeo "Pêndulos Acoplados" para resolver o problema de dois pêndulos acoplados. Ambos estão no DVD que acompanha esta monografia. No vídeo "Oscilações" são apresentados alguns resultados importantes sobre o movimento do pêndulo simples. Alguns destes resultados foram listados a seguir:

- 1) A força de resistência do ar pode ser desprezada quando as dimensões das massas são pequenas.
- 2) O período do pêndulo não depende da massa quando a resistência do ar é desprezível.
- 3) O período do pêndulo depende em geral do valor inicial do ângulo  $\theta$ .
- 4) No caso em que os valores do ângulo  $\theta$  são pequenos, o período do pêndulo não depende do valor inicial do ângulo  $\theta$ .
- 5) O período do pêndulo diminui quando seu comprimento diminui e aumenta quando a gravidade efetiva diminui.
- 6) Quando o comprimento do pêndulo é igual a  $(1,00 \pm 0,01)m$ , o valor de 10 períodos  $(10 \cdot \tau)$  é igual a  $(20,03 \pm 0,03)s$ .

Para facilitar o acesso às cenas do vídeo "Oscilações" [1] que deram origem às observações anteriores colocamos na tabela a seguir os intervalos de tempo em que elas ocorrem:

| VÍDEO OSCILAÇÕES                                                             |                       |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Força restauradora                                                           | 0:00 min a 0:43 min   |
| Discussão da dependência do período com seus parâmetros e condições iniciais | 0:45 min a 5:09 min   |
| Construção da solução do pêndulos simples com o movimento das sombras        | 5:10 min a 11:30 min  |
| Pêndulo forçado                                                              | 11:31 min a 14:42 min |

Descreveremos a seguir como a solução do pêndulo para ângulos pequenos pode ser obtida a partir da utilização do vídeo. Com esta finalidade, vamos analisar inicialmente o círculo trigonométrico. Por definição o círculo trigonométrico tem raio  $R$  unitário.

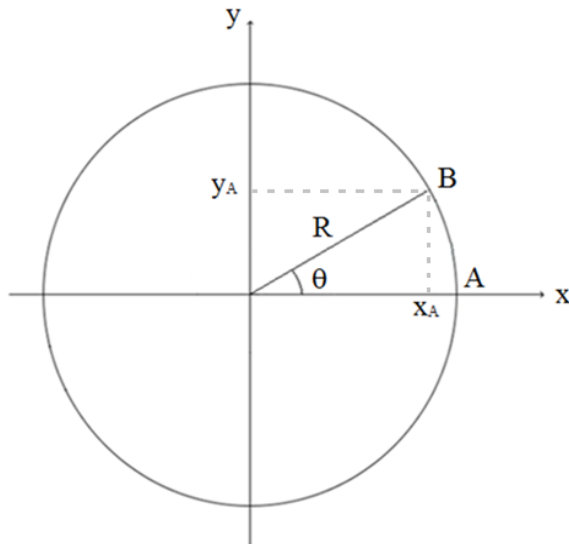


Fig.5 – Círculo de raio  $R$  unitário.

A Fig.5 mostra que a ordenada ( $y_A$ ) do ponto A é o  $\text{sen } \theta$  e abscissa ( $x_A$ ) é o  $\text{cos } \theta$ , uma vez que

$$\text{sen}(\theta) = \frac{y_A}{R} = y_A \text{ e } \text{cos}(\theta) = \frac{x_A}{R} = x_A \quad (2)$$

O ângulo  $\theta$  expresso em radianos é a razão entre o comprimento do arco ( $s$ ) e o raio ( $R$ ) do círculo

$$\theta = \frac{s}{R} \quad (3).$$

Por isto, no caso do círculo trigonométrico cujo raio é unitário, a medida do ângulo coincide com a medida do arco.

$$\theta = \frac{\widehat{AB}}{R} = \frac{s}{R} = s$$

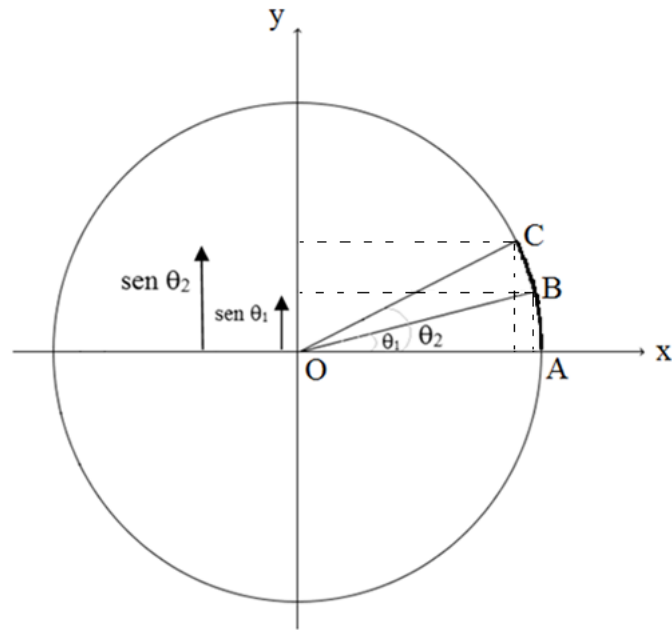


Fig.6 – Círculo trigonométrico.

Observando a Fig.6 verificamos que no caso do ângulo  $\theta_1$  o valor do  $\text{sen}(\theta_1)$  se aproxima da medida do arco ( $\text{sen}(\theta_1) \approx \widehat{AB}$ ). Logo, podemos concluir que para ângulos pequenos

$$\text{sen } \theta \approx \theta \quad (4).$$

A aproximação (4) se confirma quando ampliamos a região para pequenos ângulos (Fig.7 e Fig.8) no gráfico da função  $\text{sen } \theta$ .

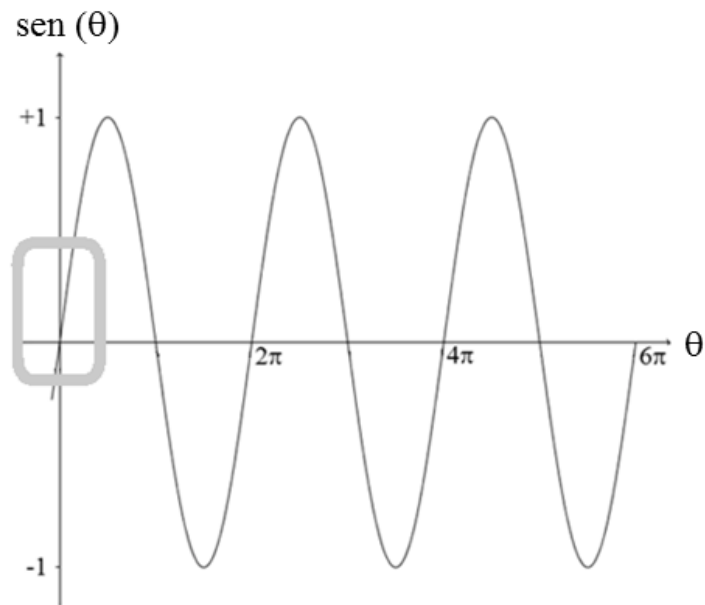


Fig.7 – Região envolvida para a ampliação.

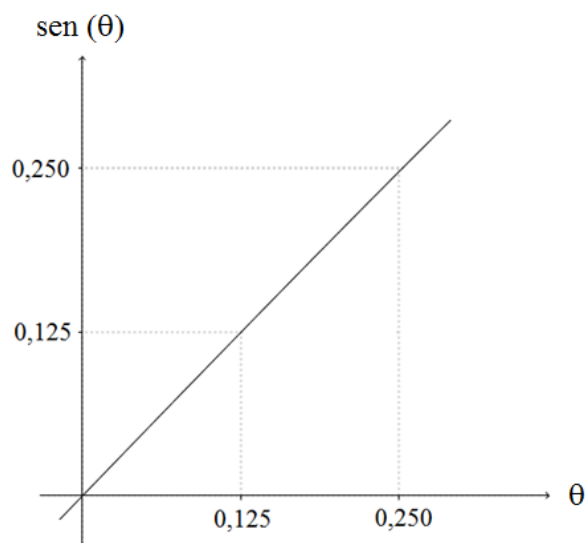


Fig.8 – Ampliação da região envolvida.

Notamos que para pequenos ângulos, o gráfico da função  $\text{sen } \theta$  se transforma em uma reta. Confirmando nossa aproximação (4).

$$\text{sen } \theta \cong \theta$$

Portanto, pela equação (1), para pequenos ângulos a aceleração tangencial do pêndulo simples se reduz a

$$a_{\theta} \cong -g \cdot \theta \quad (5).$$

Para obter a solução dessa equação, vamos utilizar a imagem do vídeo [1] que mostra que a sombra do pêndulo (Fig.10) acompanha a sombra de um bastão  $P$  que foi projetada em um anteparo vertical. O bastão está em repouso sobre uma plataforma que gira com velocidade angular constante (Fig.9).

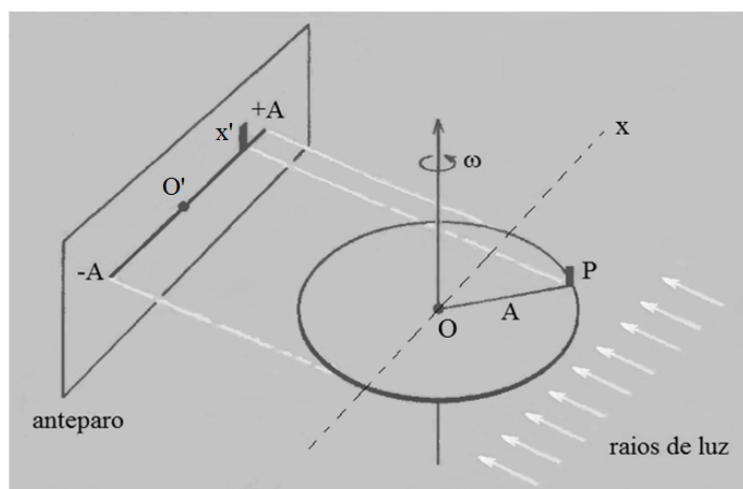


Fig.9 – Bastão em movimento circular e sua projeção em um anteparo vertical.

O movimento da sombra do pêndulo acompanha a sombra do bastão no anteparo vertical.

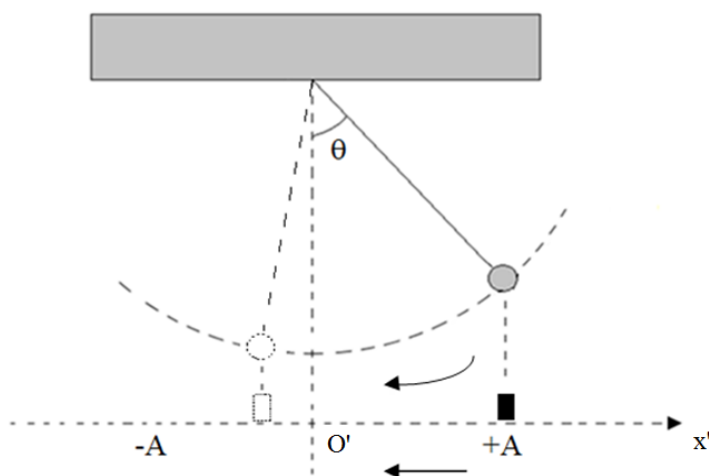


Fig.10 – A sombra do pêndulo acompanha a sombra do bastão no anteparo.

O bastão realiza um movimento circular uniforme (MCU) em um plano horizontal (Fig.9), de tal forma que podemos obter o movimento de sua sombra projetando o ponto, que representa a base do bastão, no eixo  $Ox$ .

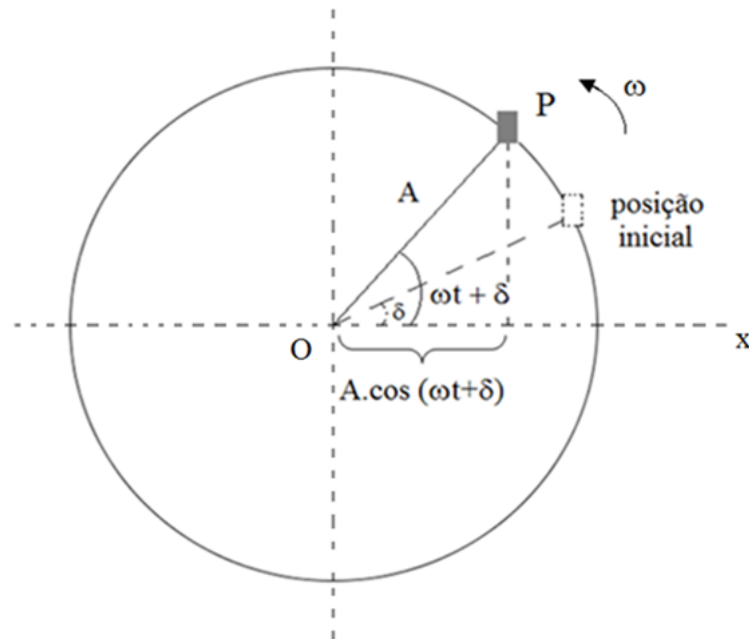


Fig. 11 – Vista de cima do MCU anterior.

Pela (Fig.11) a equação que descreve o movimento da sombra do bastão no anteparo é

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad (6).$$

As propriedades desta solução ficam mais claras no gráfico  $x(t)$  versus  $t$ .

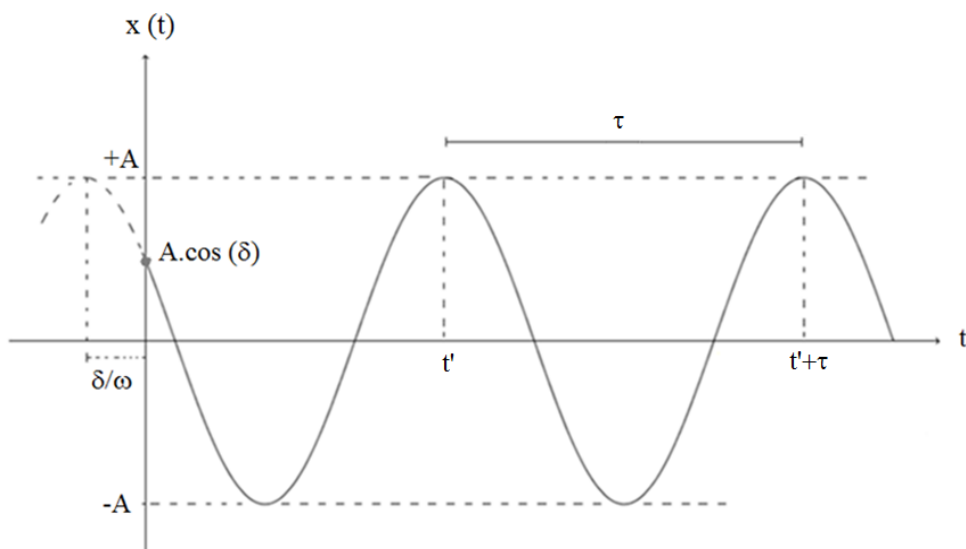


Fig.12 – Gráfico da função  $x(t)$ .

A Fig.12 nos permite interpretar o significado físico dos parâmetros da solução. O módulo do parâmetro  $A$  representa o deslocamento máximo da sombra, chamado de amplitude do movimento. O parâmetro  $\omega$  que no movimento circular representa a velocidade angular da base do bastão, no movimento da sombra possui outro significado, dado que a sombra não está girando. O parâmetro  $\omega$  é chamado de frequência angular. O menor intervalo de tempo que a sombra leva para repetir a mesma posição e a mesma velocidade é denominado período ( $\tau$ ) do movimento da sombra. Ele é igual ao período do MCU do bastão. Entretanto, mesmo que a velocidade angular do MCU e a frequência angular do movimento da sombra possuam significados diferentes, as relações entre elas e o período são iguais, isto é

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \quad (7).$$

Outra grandeza importante no movimento da sombra é a frequência que é o número de oscilações por segundo. A relação entre a frequência e o período é

$$f = \frac{1}{\tau}$$

A unidade da frequência ( $f$ ) é  $\frac{1}{s}$  que é denominada *Hz* (*hertz*) e a unidade da frequência angular ( $\omega$ ) é  $\frac{rd}{s}$ .

O argumento do cosseno ( $\omega t + \delta$ ) é a chamada fase do movimento, logo  $\delta$  representa a fase inicial. A amplitude máxima do movimento ( $A$ ) e a fase inicial ( $\delta$ ) são determinadas pelas condições iniciais do movimento, que são duas, a posição inicial ( $x_0$ ) e a velocidade inicial ( $v_0$ ).

Com a compreensão dos parâmetros da solução (6) concluímos o estudo da função que descreve o movimento da sombra do bastão. Agora, vamos obter a expressão matemática para a velocidade da sombra de maneira análoga ao que fizemos para a posição. Com esta finalidade, vamos projetar o vetor velocidade ( $\vec{v}$ ) do ponto que representa a base do bastão em MCU (Fig.13) no eixo  $Ox$ . O vetor velocidade é tangente à circunferência em cada ponto e forma com o eixo  $Ox$  um ângulo  $\beta = \omega t + \delta + \frac{\pi}{2}$ . Com efeito,

$$v_x = v \cdot \cos(\beta) = v \cdot \cos\left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_x = -v \cdot \sin(\omega t + \delta) \quad (8).$$

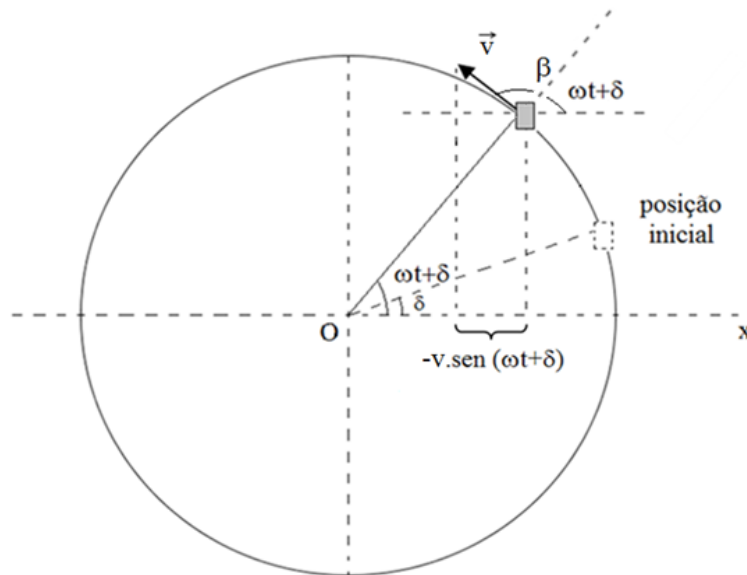


Fig.13 – Vista de cima do MCU.

No MCU o módulo do vetor velocidade é constante e seu valor é dado por

$$v = \omega \cdot A \quad (9).$$

Substituindo (9) em (8), chegamos à expressão para a velocidade da sombra em função do tempo.

$$v_x(t) = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + \delta) \quad (10).$$

A dedução formal da expressão da velocidade obtida por meio de equações diferenciais se encontra no [APÊNDICE 1]. Vamos estudar as propriedades da velocidade da sombra (10). O gráfico da velocidade da sombra como função do tempo se encontra na Fig.14.

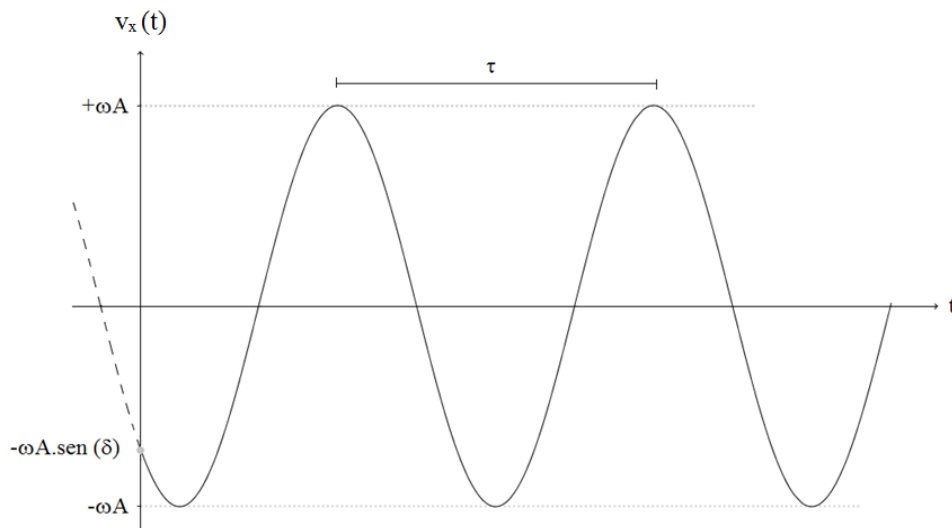


Fig.14 – Gráfico da velocidade da sombra.

Como o movimento da sombra é unidimensional, a velocidade da massa em determinado instante  $t'$  é o coeficiente angular da reta tangente do gráfico  $x(t)$  versus  $t$  neste mesmo instante. Na Fig. 15 foram desenhadas as tangentes nos pontos em que o módulo do deslocamento é máximo ( $|x(t)| = A$ ) e nos pontos onde o deslocamento da massa é nulo ( $|x(t)| = 0$ ). A observação do gráfico permite concluir que o período do movimento da

sombra é o menor intervalo de tempo para que a mesma situação física se repita, isto é, para que

$$x(t' + \tau) = x(t')$$

$$v_x(t' + \tau) = v_x(t')$$

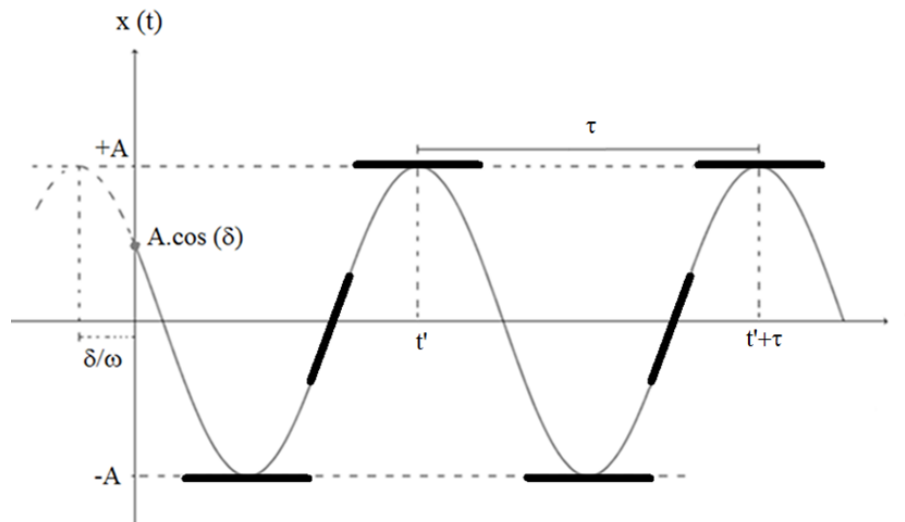


Fig.15 – Gráfico da função  $x(t)$ . Retas tangentes em alguns pontos.

Na Fig.16 foram desenhadas no mesmo gráfico as funções  $x(t)$  e  $v_x(t)$ . Com ele podemos facilmente analisar o movimento da sombra do bastão entre os instantes  $t'$  e  $t' + \Delta t$  representados na figura:

- 1) Em  $t'$  a sombra tem velocidade nula.
- 2) A seguir, ela começa a se aproximar da origem  $O'$  (Fig.9 e Fig.10) com velocidade negativa.
- 3) Quando  $x = 0$  a velocidade atinge o seu valor mínimo.
- 4) Quando a sombra atinge o ponto  $x = -A$ , ela para instantaneamente e inverte o seu movimento.
- 5) A partir daí a velocidade fica positiva, cresce atingindo o seu máximo em  $x = 0$  e volta a se anular em  $x = +A$ .

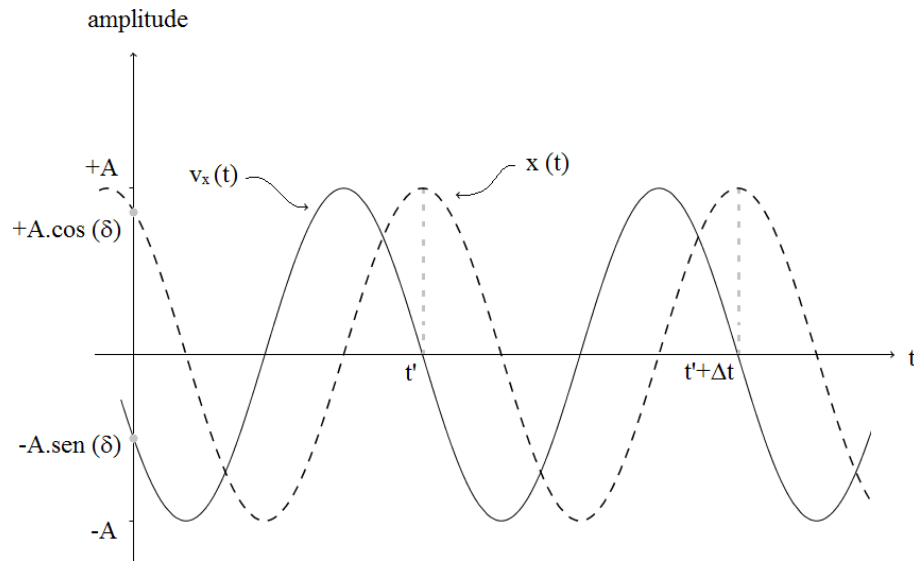


Fig.16 –  $x(t)$  (linha interrompida) e  $v_x(t)$  (linha contínua). Para efeito de escala  $|\omega| = 1$ .

Vamos retornar ao problema do pêndulo. No vídeo "Oscilações" observamos que a sombra do pêndulo acompanha a sombra do bastão. Então, a posição horizontal do pêndulo é dada por (6)

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta).$$

Podemos fazer uma aproximação (Fig.17) para ângulos pequenos.

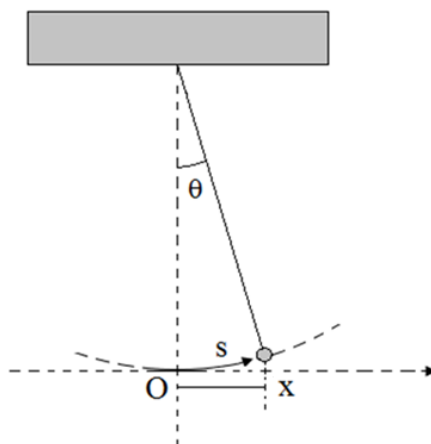


Fig.17 – Aproximação para ângulos pequenos.

A Fig.17 mostra que na aproximação para ângulos pequenos o comprimento do arco  $s$  e a posição  $x$  são aproximadamente iguais.

$$s(t) \cong x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad (11).$$

Logo, o problema do pêndulo está parcialmente resolvido. Falta encontrar a relação entre o período do pêndulo e os parâmetros ( $l$ ,  $m$ ,  $g$ ) que aparecem na resolução deste problema. Com esta finalidade vamos utilizar alguns resultados do vídeo que foram citados no início do texto:

2) O período do pêndulo não depende da massa quando a resistência do ar é desprezível.

4) No caso em que os valores do ângulo  $\theta$  são pequenos, o período do pêndulo não depende do valor inicial do ângulo  $\theta$ .

5) O período do pêndulo diminui quando seu comprimento diminui e aumenta quando a gravidade efetiva diminui.

6) Quando o comprimento do pêndulo é igual a  $(1,00 \pm 0,01)m$ , o valor de 10 períodos ( $10 \cdot \tau$ ) é igual a  $(20,03 \pm 0,03)s$ .

Vamos fazer uma análise dimensional para tentar obter uma expressão para o período do pêndulo que contemple as observações (2), (4) e (5),

$$\frac{[l]}{[g]} = \frac{m}{m/s^2} = s^2$$

a razão entre  $l$  e  $g$  possui dimensão de tempo ao quadrado. Portanto, o período do pêndulo deve ser proporcional à raiz quadrada desta razão.

$$\tau = c \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (12).$$

O resultado das medidas experimentais realizadas no vídeo, observação (6), permite calcular o valor da constante adimensional  $c$ . As medidas realizadas no vídeo nos permitem

encontrar o valor de  $c \cong 6,3$ , bem próximo do valor obtido pelas equações diferenciais [APÊNDICE 1],  $c = 2\pi$ . Assim, o período do pêndulo é expresso por

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (13).$$

Para pequenas oscilações a expressão da aceleração tangencial do pêndulo simples pode ser reescrita da seguinte forma

$$a_\theta \cong a_x = -g \cdot \theta = -\frac{g}{l} \cdot s = -\frac{g}{l} \cdot x \quad (14).$$

Resumimos a seguir os seguintes resultados para o problema do pêndulo no regime de oscilações de pequenas amplitudes:

- 1) A aceleração do pêndulo é:

$$a_x = -\frac{g}{l} \cdot x \quad (15)$$

- 2) A solução do pêndulo é:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad (16)$$

- 3) A frequência angular do movimento é:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (17).$$

As funções seno e cosseno são denominadas **funções harmônicas**. Como a solução (16) é uma função harmônica, denominamos o pêndulo simples de **oscilador harmônico**. O movimento realizado pelos osciladores harmônicos é chamado de **movimento harmônico simples** (MHS).

Agora, vamos estudar o sistema massa-mola. Mostraremos que é possível obter a solução deste sistema fazendo uma analogia dele com o pêndulo simples.

### 1.3. SISTEMA MOLA-MASSA-MOLA

O sistema massa-mola que vamos estudar é constituído por uma plataforma plana e horizontal onde se encontra apoiada uma massa ( $m$ ) entre duas molas iguais, cujas constantes elásticas valem  $k$  (Fig.18). A massa possui um ponto de equilíbrio estável, neste ponto escolhemos a origem do eixo  $Ox$ .

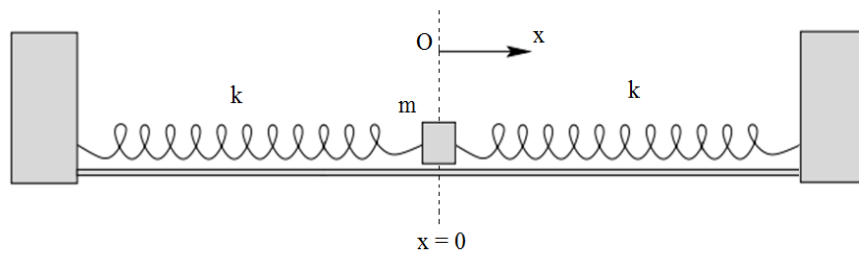


Fig.18 – Sistema massa-mola.

Quando deslocada dessa posição a massa começa a oscilar em torno dela, de maneira semelhante ao pêndulo simples e ao João Bobo. Para simplificar o problema vamos desconsiderar o atrito da massa com a plataforma e as massas das molas. Essas simplificações são boas quando a massa das molas é muito pequena comparada à massa que oscila.

De maneira semelhante ao problema do pêndulo simples estamos interessados em obter uma função que descreva a trajetória da massa ao longo do tempo, ou seja, pretendemos achar  $x(t)$ . Devemos, portanto, aplicar a Segunda Lei de Newton. Vamos isolar a massa na posição em que seu deslocamento da posição de equilíbrio vale  $x$  (Fig.19) e colocar as forças que atuam sobre ela (Fig.20).

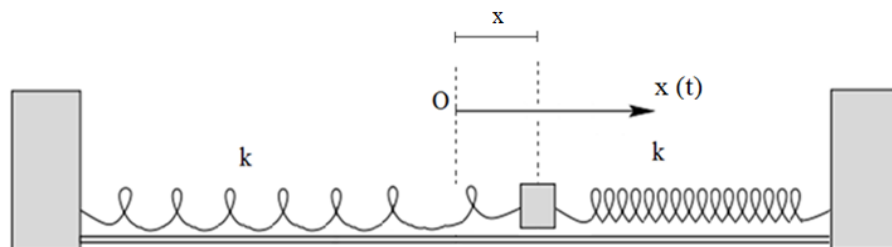


Fig.19 – Sistema deslocado do equilíbrio.

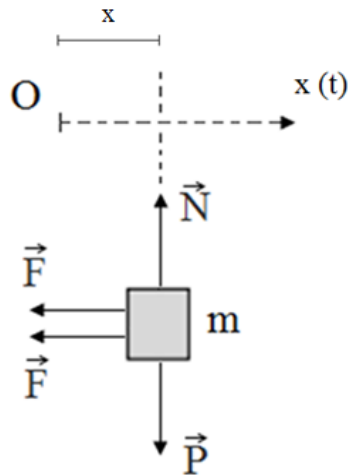


Fig.20 – Diagrama de forças.

Na direção vertical não há deslocamentos, logo  $\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$ . Na direção horizontal temos

$$\vec{F} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_x \quad (18).$$

Vamos supor que as forças exercidas por cada uma das molas obedecem à Lei de Hooke, isto é

$$F_x = -k \cdot x \quad (19).$$

A Lei de Hooke pode ser utilizada sempre que a deformação da mola não é muito grande comparada ao passo da hélice da mola. Substituindo a expressão (19) na (18), temos

$$-2 \cdot k \cdot x = m \cdot a_x$$

portanto, a expressão da aceleração da massa na direção horizontal é dada por

$$a_x = -\frac{2k}{m} \cdot x \quad (20).$$

Podemos notar a semelhança entre a aceleração expressa pela equação (20) e a aceleração do pêndulo simples para pequenos deslocamentos (16). Nos dois casos, as acelerações são proporcionais aos deslocamentos das massas e tendem a levá-las para a posição de equilíbrio.

Assim, esperamos que a solução do sistema massa-mola  $(x(t))$  seja do mesmo tipo da solução do pêndulo simples (16). A equação que fornece a aceleração do pêndulo simples para pequenas amplitudes (16) se transforma na equação que fornece a aceleração do sistema massa-mola se fizermos a seguinte substituição:

$$\frac{g}{l} \rightarrow \frac{2k}{m} \quad (21).$$

Podemos obter a solução do sistema massa-mola descrito pela equação (20) fazendo a substituição da expressão (21) nas equações (16) e (17), isto é

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad (22)$$

onde a frequência angular é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (23).$$

Osciladores harmônicos são descritos por funções harmônicas cujos períodos dependem apenas de seus parâmetros físicos. Todos eles são descritos por equações análogas. Por isto, sempre que mostrarmos que um sistema satisfaz uma equação análoga à de um oscilador harmônico não precisamos resolvê-la porque já conhecemos sua solução.

Agora, vamos resolver um problema de dois pêndulos acoplados. Vamos tentar resolver este problema através de vídeos e programas que permitem obter a trajetória dos mesmos.

## CAPÍTULO 2 - MODOS NORMAIS DE OSCILAÇÃO

### 2.1. PÊNDULOS ACOPLADOS

Vamos estudar um oscilador acoplado, formado por dois pêndulos simples idênticos ( $m, l$ ) ligados por uma mola ( $k$ ) (Fig.21). Resolvemos o problema do pêndulo simples e concluímos que para pequenas amplitudes ele é um oscilador harmônico. Os pêndulos agora estão ligados por uma mola, assim, o deslocamento de um deles influencia o do outro. O vídeo "Pêndulos Acoplados" [2] mostra que os movimentos dos pêndulos acoplados não são, em geral, harmônicos. Estas cenas estão situadas no intervalo de tempo que vai de 0:00 min até 1:04 min.

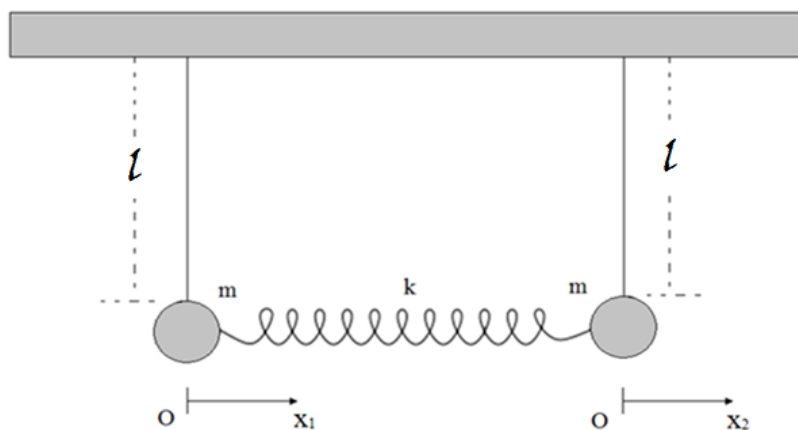


Fig.21 – Pêndulos acoplados na posição de equilíbrio.

Com o auxílio do vídeo "Pêndulos Acoplados" [2] investigamos a possibilidade de existirem situações nas quais os pêndulos acoplados têm movimentos harmônicos. Quando dois pêndulos acoplados oscilam harmonicamente dizemos que eles estão se movimentando em um modo, denominado **modo normal** de oscilação. Com esta finalidade, comparamos o movimento do pêndulo simples com o movimento dos pêndulos acoplados.

Vamos inicialmente obter as acelerações que descrevem o movimento dos dois pêndulos acoplados. Para um pequeno deslocamento do equilíbrio (Fig.22), vamos isolar as massas e colocar as forças que atuam em cada uma delas utilizando a Terceira Lei de Newton (Fig.23). Em seguida, vamos aplicar a Segunda Lei de Newton.

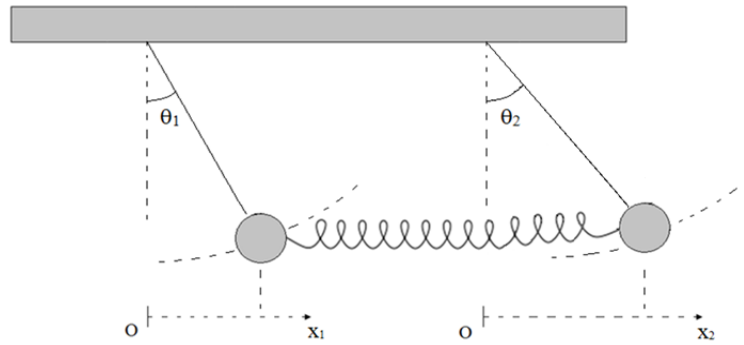


Fig.22 – Pêndulos deslocados do equilíbrio.

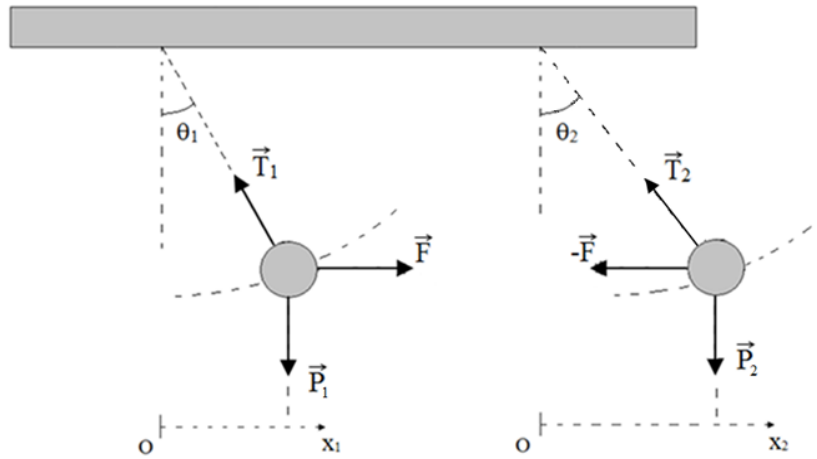


Fig.23 – Diagramas de forças.

As forças  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$  representadas na Fig.23 são as forças que a mola exerce sobre as massas. Seus módulos são iguais porque consideramos a massa da mola desprezível. Pela Segunda Lei de Newton

$$\vec{T}_1 + \vec{F} + \vec{P}_1 = m \cdot \vec{a}_1 \quad (24)$$

$$\vec{T}_2 + (-\vec{F}) + \vec{P}_2 = m \cdot \vec{a}_2 \quad (25).$$

Sabemos pelo problema do pêndulo simples que a força restauradora se encontra na direção tangencial. Então, pela Segunda Lei de Newton nessa direção

$$P_{1\theta} + F_\theta = m \cdot a_{1\theta} \quad (26)$$

$$P_{2\theta} - F_\theta = m \cdot a_{2\theta} \quad (27).$$

Assim como no problema do sistema massa-mola as forças elásticas obedecem à Lei de Hooke como uma boa aproximação. E lembrando que para pequenas amplitudes (Fig.17) a direção tangencial se aproxima da direção horizontal  $Ox$ , pois  $s(t) \cong x(t)$ .

$$F_{\theta} \cong F_x = k \cdot (x_2 - x_1) \quad (28)$$

$$P_{i\theta} \cong -\frac{m \cdot g}{l} \cdot x_i \quad (29)$$

Substituindo (28) e (29) em (26) e (27), temos

$$-\frac{m \cdot g}{l} \cdot x_1 + k \cdot (x_2 - x_1) = m \cdot a_{1\theta} \quad (30)$$

$$-\frac{m \cdot g}{l} \cdot x_2 - k \cdot (x_2 - x_1) = m \cdot a_{2\theta} \quad (31).$$

Relembrando que para pequenas oscilações as componentes das acelerações na direção tangencial e na direção do eixo  $Ox$  são aproximadamente iguais, podemos reescrever as equações (30) e (31) da seguinte forma:

$$a_{1x} = -\frac{g}{l} \cdot x_1 + \frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_1) \quad (32)$$

$$a_{2x} = -\frac{g}{l} \cdot x_2 - \frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_1) \quad (33).$$

Analisando o sistema formado pelas equações (32) e (33) podemos notar que a aceleração de um dos pêndulos depende das coordenadas do outro pêndulo. Isto significa que as equações que descrevem o movimento dos pêndulos são acopladas. A solução do sistema de equações diferenciais se encontra no [APÊNDICE 2]. Algumas das propriedades destas soluções aparecem no experimento que foi utilizado para fazer o vídeo "Pêndulos Acoplados" [2]. Elas estão listadas a seguir:

1) Em geral, quando os pêndulos acoplados são retirados das suas posições de equilíbrio, eles não oscilam em movimento harmônico, uma vez que as amplitudes máximas

das oscilações dos pêndulos variam com o tempo. Estas cenas estão situadas no intervalo de tempo que vai de 0:00 min até 1:04 min.

2) Existem pelos menos duas maneiras de soltar os pêndulos onde eles acompanham o movimento de um pêndulo simples, consequentemente eles têm movimentos harmônicos (modos normais de oscilação). As condições iniciais que colocam os pêndulos nos seus módulos normais de oscilações estão representadas nas Fig.24 e Fig.25. As cenas do primeiro modo normal estão no intervalo 1:40 min a 2:15 min e as do segundo modo 2:22 min a 3:04 min.

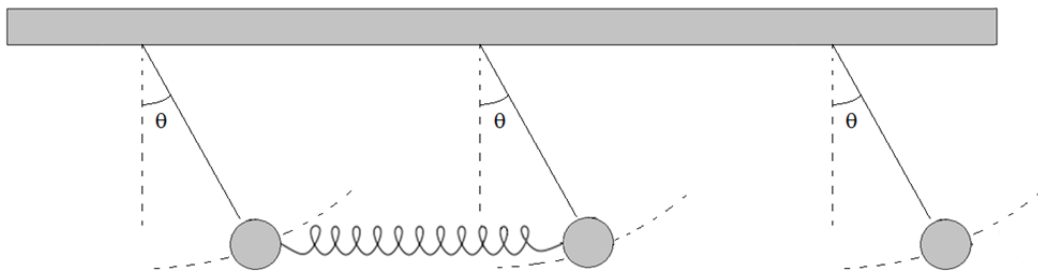


Fig.24 – O primeiro modo normal de oscilação foi obtido com as condições iniciais

$$X_{01} = X_{02}; \vec{V}_{01} = \vec{V}_{02} = \vec{0}.$$

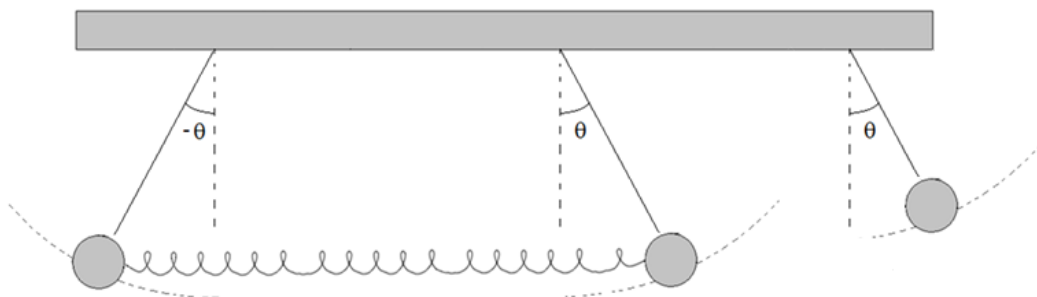


Fig.25 - O segundo modo normal de oscilação foi obtido com as condições iniciais

$$X_{01} = -X_{02}; \vec{V}_{01} = \vec{V}_{02} = \vec{0}.$$

3) As frequências de oscilação dos modos normais dos pêndulos acoplados são diferentes, uma vez que os pêndulos simples que acompanham o movimento dos pêndulos acoplados nos seus modos normais tem comprimentos diferentes. O movimento dos pêndulos

acoplados descrito na Fig.24 é denominado primeiro modo normal de oscilação e o da Fig.25 é denominado segundo modo normal de oscilação.

4) O comprimento do pêndulo simples que acompanha os pêndulos acoplados no seu primeiro modo normal de oscilação é muito próximo do comprimento dos pêndulos acoplados. Logo a frequência angular de oscilação do primeiro modo normal é dada por

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (34).$$

Com as informações fornecidas pelo vídeo "Pêndulos Acoplados" [2] podemos descrever o movimento dos pêndulos no primeiro modo normal de oscilação com as seguintes equações:

$$x_1(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad (35)$$

$$x_2(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad (36).$$

A equação (34) permite entender o primeiro modo normal da seguinte forma: Como os deslocamentos são iguais a mola não se deforma, ou seja, o acoplamento deve desaparecer. Por isto, os dois pêndulos oscilam como pêndulos livres.

Não é possível com vídeo "Pêndulos acoplados" obter a relação que existe entre os parâmetros internos dos pêndulos acoplados  $(l, k, m)$ , e a aceleração da gravidade  $g$ . A expressão que fornece a frequência angular do segundo modo normal é [APÊNDICE 2]

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega' = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} \quad (37).$$

Todavia, a medida do comprimento do pêndulo simples que acompanhou o pêndulo acoplado no segundo modo normal permite calcular o seu valor. No [APÊNDICE 4] disponibilizamos os valores dos comprimentos e suas respectivas incertezas.

O vídeo [2] também mostra que existe uma diferença de fase de  $\pi$  radianos entre as posições dos pêndulos, uma vez que os pêndulos estão sempre em posições diametralmente opostas em relação às suas posições de equilíbrio. Logo, podemos escrever suas posições como

$$x_1(t) = B \cdot \cos(\omega' t + \delta) \quad (38)$$

$$x_2(t) = B \cdot \cos(\omega' t + \delta + \pi) \quad (39).$$

As deduções formais por meio de equações diferenciais se encontram no [APÊNDICE 2].

A análise do movimento geral dos pêndulos acoplados foi realizada com pontos obtidos com o aplicativo ImageJ. Utilizamos neste programa uma sequência de imagens capturadas com aplicativo VirtualDub. O vídeo capturado tinha imagens com dimensões de 320 por 213 px. O vídeo foi produzido com 30 imagens por segundo. Logo o intervalo entre duas imagens consecutivas do vídeo era de 1/30s. No programa ImageJ utilizamos as apenas as imagens ímpares da sequência capturada no VirtualDub. Por isto, o intervalo de tempo entre duas imagens consecutivas da sequência utilizada no ImageJ foi de 2/30s. A Fig.26.1 mostra uma destas imagens. Nela foram marcados a origem O do sistema de eixos coordenados e o ponto P cujas coordenadas o programa forneceu. Denominamos o eixo horizontal de eixo  $Ox$ .

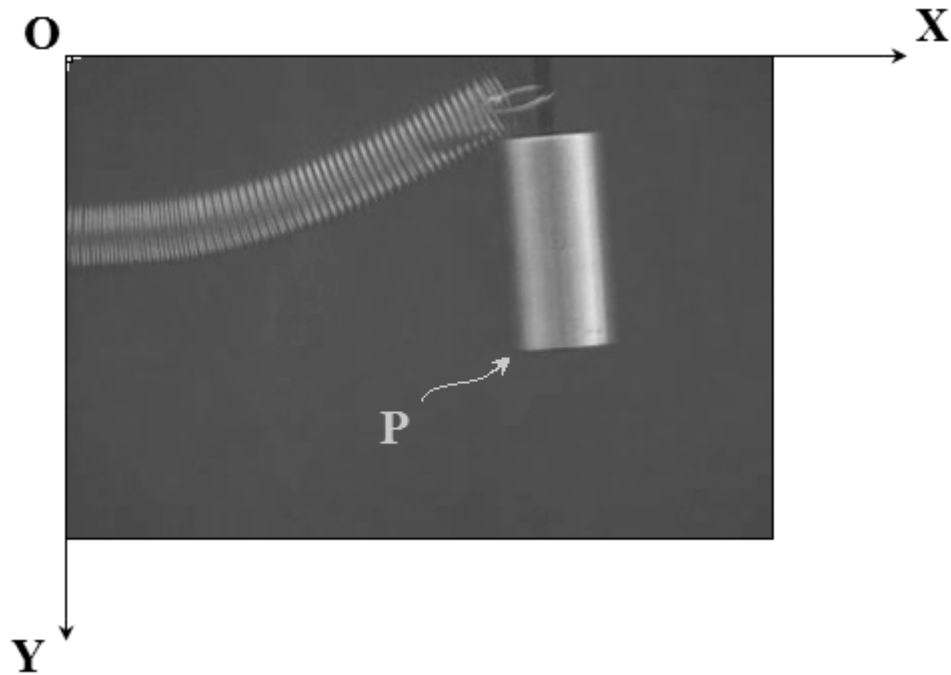


Fig.26.1 – Imagem utilizada no ImageJ.

Na Tabela 1 [APÊNDICE 4] foram colocados o número (N) da imagem e a coordenada (x) do ponto P da imagem N em pixels. O tempo correspondente à posição do ponto P da imagem N é dado por:

$$t_N = \frac{2N}{30} \text{ s} .$$

A Fig.26.2 mostra o gráfico obtido com a Tabela 1. Na abscissa foram colocados o número da imagem N da sequência utilizada no ImageJ e na ordenada a posição do ponto P em pixels [APÊNDICE 4].

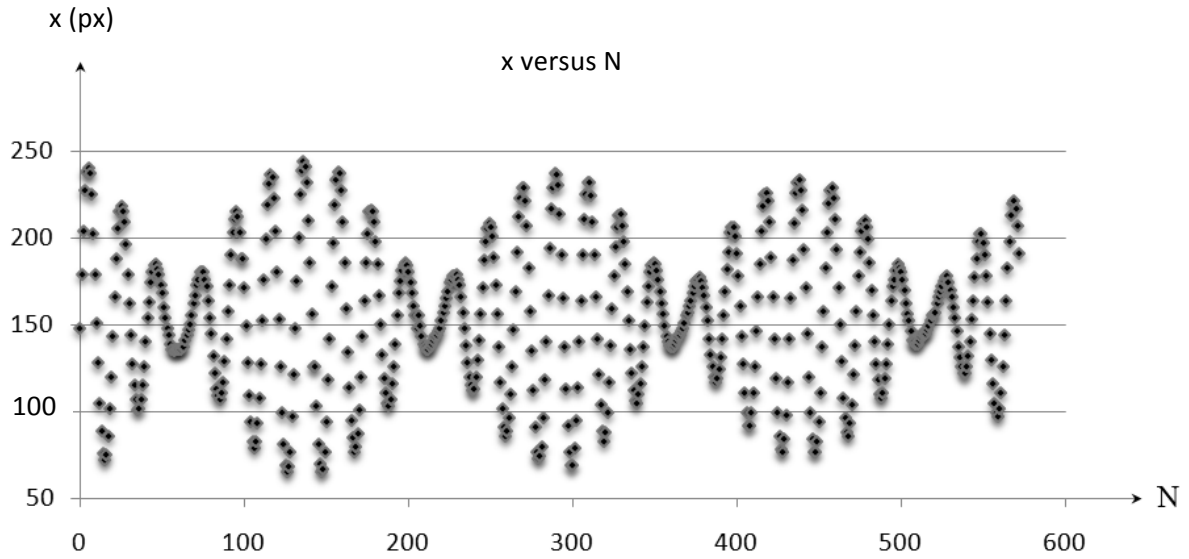


Fig.26.2 – Gráfico de  $x_1(t)$  obtido pelos programas através do vídeo.

O gráfico da Fig.26 mostra um movimento periódico com amplitude máxima variável. O período do movimento do pêndulo (denominado período rápido  $\tau_r$ ) e período de variação da amplitude máxima (denominado período da amplitude  $\tau_a$ ) são bem diferentes. Eles foram estimados no [APÊNDICE 4] e são iguais a

$$\tau_r = (1,35 \pm 0,07) \text{ s}$$

$$\tau_a = (20,13 \pm 0,07) \text{ s}.$$

A pergunta que se coloca a seguir é “Será que existe alguma forma de se obter o movimento geral dos pêndulos acoplados a partir das funções que descrevem os dois modos normais de oscilações que obtivemos?”.

A seguir está apresentada a análise que fizemos para responder a esta pergunta. Vamos tentar obter com as funções que descrevem os modos normais dos pêndulos uma função que descreva de modo qualitativo o movimento geral dos pêndulos acoplados. A proposta mais simples seria a soma das funções que descrevem os modos normais. Com efeito,

$$x_1(t) = A_1 \cdot \cos(\omega t + \delta_1) + A_2 \cdot \cos(\omega t + \delta_2) \quad (40)$$

$$x_2(t) = A_3 \cdot \cos(\omega t + \delta_1) + A_4 \cdot \cos(\omega t + \delta_2) \quad (41).$$

Para facilitar a análise, escolhamos as fases iniciais nulas ( $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ) e as amplitudes iguais ( $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A$ ). A igualdade das amplitudes está dando aos dois modos pesos iguais. Vamos tentar obter uma solução apenas para um dos pêndulos, pois a discussão é análoga para o outro. Vamos utilizar a seguinte identidade trigonométrica

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \quad (42).$$

Aplicando (42) para a equação (40), temos

$$x_1(t) = 2 \cdot A \cdot \cos\left[\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right) \cdot t\right] \cos\left[\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \cdot t\right] \quad (43).$$

O gráfico da expressão (43) para o caso das frequências dos modos normais bem próximas uma da outra ( $\omega' \approx \omega$ ) se encontra na Fig.27.

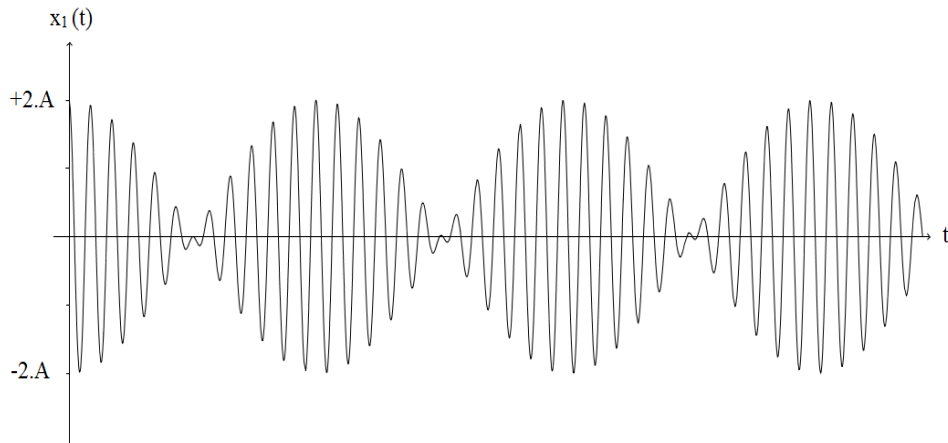


Fig.27 – Gráfico de  $x_1(t)$  obtido teoricamente (43).

A semelhança do gráfico obtido pelos programas (Fig.26) com o gráfico obtido teoricamente (Fig.27) confirma que a soma das soluções dos modos normais pode ser a solução geral do movimento dos pêndulos acoplados. Esta suposição é confirmada quando

resolvemos as equações diferenciais dos pêndulos acoplados e verificamos que os modos normais formam uma base para as soluções destas equações [APÊNDICE 2].

Podemos dar veracidade à solução obtida com as somas dos modos normais mostrando de forma semi-quantitativa que o período de amplitude e o período rápido obtido com a tabela gerada com o vídeo e os períodos rápidos e de amplitude obtidos com os comprimentos dos pêndulos simples que acompanham os dois modos normais tem acurácia grande. Com esta finalidade, vamos reescrever a expressão (43).

$$x_1(t) = A(t) \cdot \cos \left[ \left( \frac{\omega' + \omega}{2} \right) \cdot t \right]$$

onde

$$A(t) = 2 \cdot A \cdot \cos \left[ \left( \frac{\omega' - \omega}{2} \right) \cdot t \right]$$

Assim, podemos obter uma expressão para o período de amplitude e para o período rápido.

$$\omega_a = \left( \frac{\omega' - \omega}{2} \right) \Rightarrow \tau_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{4\pi}{\omega' - \omega} = \frac{2\tau\tau'}{\tau - \tau'} \quad (44)$$

$$\omega_r = \left( \frac{\omega' + \omega}{2} \right) \Rightarrow \tau_r = \frac{2\pi}{\omega_r} = \frac{2\tau\tau'}{\tau + \tau'} \quad (45).$$

O comprimento do pêndulo simples que acompanhou o movimento dos pêndulos acoplados no primeiro modo de oscilação vale  $l_1 = (50,0 \pm 0,3) \text{ cm}$ . Logo, o período do primeiro modo normal de oscilação é  $\tau = (1,419 \pm 0,008) \text{ s}$ . O comprimento do pêndulo simples que acompanhou o movimento dos pêndulos acoplados no segundo modo de oscilação vale  $l_2 = (39,0 \pm 0,3) \text{ cm}$ . Logo, o período do segundo modo normal de oscilação é  $\tau' = (1,253 \pm 0,008) \text{ s}$ . Assim, o período de amplitude  $\tau'_a$  e o período rápido  $\tau'_r$  obtidos com as expressões (44) e (45) são:

$$\tau'_r = (1,331 \pm 0,005) s$$

$$\tau'_a = (21,5 \pm 1,4) s.$$

A seguir repetimos os valores do período de amplitude e o período rápido obtidos com a tabela proveniente do vídeo “Pêndulos Acoplados”.

$$\tau_r = (1,35 \pm 0,07) s$$

$$\tau_a = (20,13 \pm 0,07) s.$$

Para comparar os valores obtidos, vamos calcular a acurácia das medidas através da expressão

$$acurácia = \left| \frac{\tau' - \tau}{\tau'} \right|.$$

Os valores da acurácia para o período de amplitude e o período rápido são:

$$\left| \frac{\tau'_a - \tau_a}{\tau_a} \right| \cong 6,1\%; \quad \left| \frac{\tau'_r - \tau_r}{\tau_r} \right| \cong 0,26\%.$$

Esses resultados nos permitem concluir que existe um forte indicativo experimental de que o movimento geral dos pêndulos acoplados é a soma dos modos normais dos pêndulos. Sabemos que este resultado é sempre válido [APÊNDICE 2], isto é, a função que descreve o movimento dos pêndulos acoplados é a combinação linear das funções que descrevem os seus modos normais.

É importante ressaltar as informações que o vídeo “Pêndulos Acoplados” não fornece:

- 1) A expressão analítica do movimento geral dos pêndulos.
- 2) A relação entre a frequência do segundo modo normal de vibração e os parâmetros internos dos pêndulo.

3) A existência de apenas dois modos normais de vibração para os pêndulos acoplados. Retornaremos a esta discussão em breve.

O vídeo “Oscilações” [1] mostrou que quando tentamos forçar a oscilação de um pêndulo simples, ele responde melhor quando a frequência da força externa é próxima da frequência de oscilação do pêndulo livre. No vídeo “Pêndulos Acoplados” [2] (3:06 min a 4:05 min) mostramos que quando tentamos forçar os pêndulos aparecem facilmente os dois modos normais de oscilação. Este fenômeno é conhecido como ressonância [APÊNDICE 3]. Na Fig.28 está representado o ponto de aplicação da força externa, seu ponto de suspensão. Para uma análise mais completa veja [5] e [6].

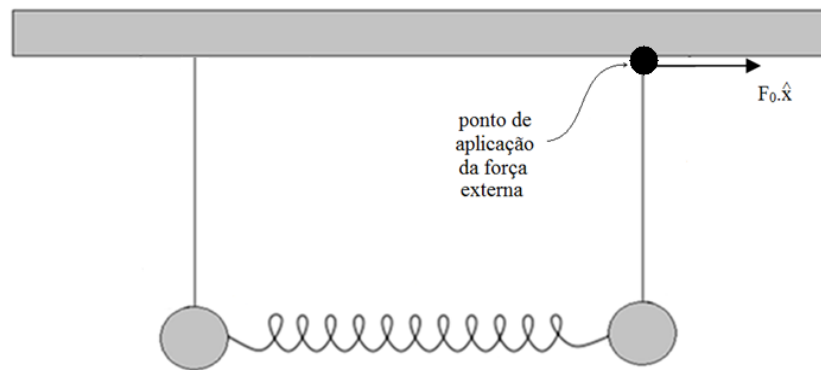


Fig.28 – Pêndulos em suas posições de equilíbrio.

Agora, vamos resolver o problema do sistema massa-mola com duas molas acopladas. Obteremos sua solução geral fazendo uma analogia com o problema dos dois pêndulos acoplados.

## 2.2. SISTEMA MASSA-MOLA ACOPLADO

Vamos estudar um sistema massa-mola formado por duas massas iguais ( $m$ ) ligadas por três molas também iguais ( $k$ ) de comprimentos naturais  $l_0$  (Fig.30). Na posição de equilíbrio do sistema as molas estão submetidas a uma força constante ( $\vec{T}$ ) e presas nos extremos em um suporte vertical. De maneira semelhante ao problema dos dois pêndulos acoplados, o deslocamento de uma das massas influencia o da outra.

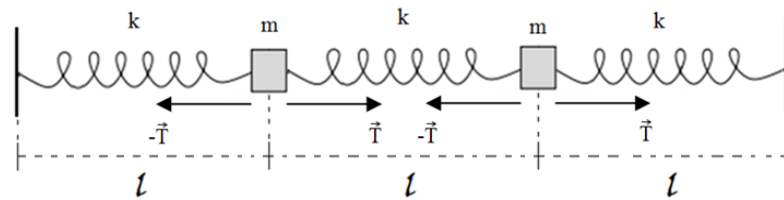


Fig.30 – Sistema massa-mola com duas massas acopladas.

Em geral, quando as massas são deslocadas de suas posições de equilíbrio seus movimentos não são harmônicos.

Resolvemos o problema dos dois pêndulos acoplados e mostramos que existem dois modos normais de oscilação, nos quais os pêndulos oscilam harmonicamente. Mostraremos através de uma analogia com o problema dos dois pêndulos acoplados, que o sistema massa-mola acoplado com deslocamento transversal (Fig.31) também possui dois modos normais de oscilação.

Para simplificar o problema vamos desprezar a resistência do ar, a massa das molas e a força-peso que atua nas massas. Essas aproximações são boas quando as dimensões das massas são pequenas, quando as forças das molas são muito maiores que a força-peso e quando as molas são leves em comparação com as massas.

Vamos obter as acelerações do movimento das massas acopladas. Para um pequeno deslocamento do equilíbrio (Fig.31), vamos isolar as massas e colocar as forças que atuam sobre elas (Fig.32). Em seguida, aplicaremos a Segunda Lei de Newton.

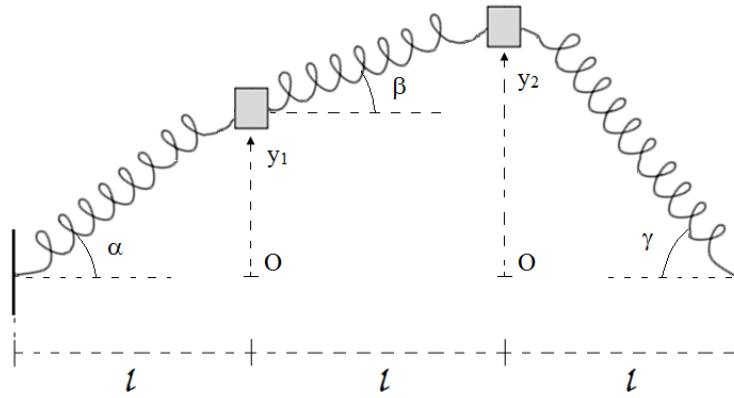


Fig.31 – Sistema massa-mola deslocado do equilíbrio.

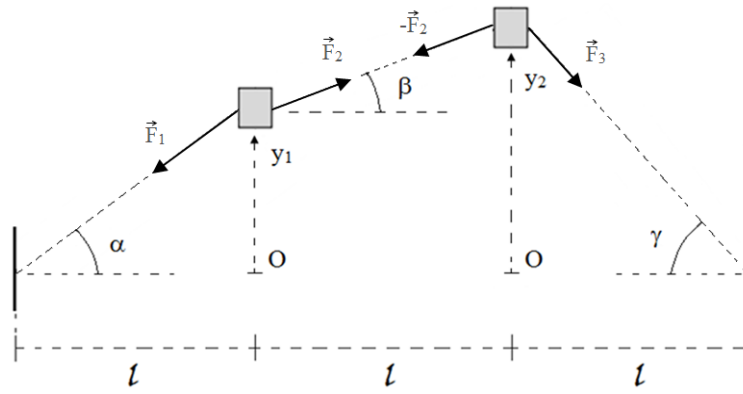


Fig.32 – Diagrama de forças.

Pelo diagrama de forças, temos

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m \cdot \vec{a}_1 \quad (46)$$

$$-\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m \cdot \vec{a}_2 \quad (47).$$

Para pequenos deslocamentos transversais podemos desconsiderar os deslocamentos longitudinais, ou seja, as molas praticamente não alteram a sua deformação inicial  $(l - l_0)$ . Logo, o módulo da força ( $T$ ) que as molas exercem sobre as massas permanece constante. Assim, as componentes no eixo  $Oy$  da Segunda Lei de Newton são:

$$-T \cdot \sin(\alpha) + T \cdot \sin(\beta) = m \cdot a_{1y} \quad (48)$$

$$-T \cdot \sin(\beta) - T \cdot \sin(\gamma) = m \cdot a_{2y} \quad (49).$$

Para pequenos ângulos (na Fig.6 vemos que  $\cos(\theta_1) = \widehat{OA} \approx 1$ ) podemos fazer a seguinte aproximação

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} \approx \operatorname{sen}(\theta) \quad (50).$$

Então, pela Fig.32 podemos escrever

$$\operatorname{sen}(\alpha) \approx \frac{y_1}{l} \quad (51)$$

$$\operatorname{sen}(\beta) \approx \frac{y_2 - y_1}{l} \quad (52)$$

$$\operatorname{sen}(\gamma) \approx \frac{y_2}{l} \quad (53).$$

Substituindo as expressões (49), (50) e (51) em (46) e (47), chegamos a

$$-T \cdot \frac{y_1}{l} + T \cdot \frac{y_2 - y_1}{l} = m \cdot a_{1y} \quad (54)$$

$$-T \cdot \frac{y_2 - y_1}{l} - T \cdot \frac{y_2}{l} = m \cdot a_{2y} \quad (55).$$

As expressões (52) e (53) nos permitem encontrar as acelerações transversais das massas

$$a_{1y} = -\frac{T}{m \cdot l} \cdot y_1 + \frac{T}{m \cdot l} \cdot (y_2 - y_1) \quad (56)$$

$$a_{2y} = -\frac{T}{m \cdot l} \cdot y_2 - \frac{T}{m \cdot l} \cdot (y_2 - y_1) \quad (57).$$

Percebemos a semelhança das acelerações (54) e (55) com as acelerações dos dois pêndulos acoplados (32) e (33), apenas as constantes são diferentes, a relação matemática entre as variáveis de ambos os problemas é a mesma. As equações do sistema massa-mola também confirmam o acoplamento das massas, a aceleração de uma delas depende das

coordenadas da outra. Dessa maneira esperamos que as soluções dos problemas sejam análogas. Assim como fizemos com o pêndulo simples e o sistema massa-mola com uma massa. Com efeito, as equações (32) e (33) dos pêndulos acoplados se transformam nas equações do sistema massa-mola acoplado (54) e (55) se fizermos as seguintes substituições:

$$\frac{g}{l} \rightarrow \frac{T}{m.l} \quad (58)$$

$$\frac{k}{m} \rightarrow \frac{T}{m.l} \quad (59)$$

Destas modificações (56) e (57) conseguimos obter as frequências angulares dos dois modos normais de oscilação ( $\omega$  e  $\omega'$ ) do sistema massa-mola acoplado

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{\frac{T}{m.l}} \quad (60)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega' = \sqrt{\frac{T}{m.l} + 2 \cdot \frac{T}{m.l}} = \omega \cdot \sqrt{3} \quad (61).$$

Assim como no pêndulo acoplado, a solução geral é a soma das soluções dos modos normais de oscilação

$$x_1(t) = A.\cos(\omega t + \delta_1) + B.\cos(\omega' t + \delta_1) \quad (62)$$

$$x_2(t) = A.\cos(\omega t + \delta_2) - B.\cos(\omega' t + \delta_2) \quad (63).$$

No vídeo [3] mostramos o sistema massa-mola com duas massas acopladas oscilando nos modos normais aplicando forças externas periódicas em suas extremidades.

## CAPÍTULO 3 – APLICAÇÕES

### 3.1. CORDAS VIBRANTES E TIMBRE

No problema dos dois pêndulos acoplados e no problema das duas massas acopladas mostramos que existem dois modos normais de oscilação. Ou seja, para duas massas existem dois modos normais e a solução geral do movimento delas é a soma das soluções dos modos normais. Este resultado pode ser generalizado para qualquer quantidade de massas acopladas. Ou seja, é possível mostrar que para  $N$  massas acopladas oscilando em uma dada direção, existem  $N$  modos normais de oscilação para o sistema. De tal forma que a solução geral para o movimento do sistema será a soma de todas as soluções dos  $N$  modos normais. O vídeo "Osciladores Forçados" [3] mostra os três modos normais de um sistema massa-mola com três massas oscilando na vertical (0:43 min a 1:40 min).

Esta discussão qualitativa nos permite compreender o conceito de timbre utilizado pelos músicos. É possível mostrar que podemos considerar uma corda de um instrumento musical como o caso limite de um sistema massa-mola com um número muito grande de massas acopladas. Para uma demonstração formal veja [5]. O vídeo "Osciladores Forçados" [3] mostra os primeiros modos normais de uma corda quando aplicamos uma força externa periódica em uma de suas extremidades (1:45 min a 3:06 min). As amplitudes dos modos normais são diferentes e para os modos de frequências maiores possuem amplitudes muito pequenas e são desprezíveis.

A nota de um instrumento musical está associada ao modo normal de menor frequência. Ao puxarmos a corda de um violão o som produzido é a soma de todos os modos normais na corda. Dado que é praticamente impossível reproduzir as condições iniciais na corda para que oscile em apenas um modo normal. Os modos normais dominantes definem a qualidade do som denominada timbre. É fácil perceber que um lá ( $440\text{ Hz}$ ) tocado em um violão é diferente daquele tocado por um violino. Isto acontece porque os modos normais dominantes destes instrumentos são diferentes. A contribuição de cada modo normal está associada ao coeficiente da série de Fourier que representa o movimento da corda [6].

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O triunfo da Ciência ao longo da História do conhecimento humano nos deixou hoje com alguns dilemas. É necessário discutirmos o que é essencial. O que desejamos que nossas crianças aprendam? O conhecimento que estamos fornecendo proporciona a elas meios para viver na sociedade que os aguarda? Essas e muitas outras questões permeiam o ensino de ciências no atual Ensino Médio.

Em primeiro lugar, vamos comentar sobre utilização de recursos tecnológicos. A tecnologia desempenha um papel central em nossa sociedade. Nosso lazer, nosso trabalho, nossa comunicação estão repletos de tecnologia. Assim, tentamos mostrar que utilizando recursos como vídeos e softwares, podemos resolver problemas de difícil abordagem no Ensino Médio. Não esgotamos as possibilidades, existem outros recursos igualmente aplicáveis e disponíveis.

Em segundo lugar, a contextualização e a interdisciplinaridade dos conteúdos. Encerramos nossa proposta mostrando uma aplicação dos conteúdos desenvolvidos no texto e nos vídeos. Mostramos uma aplicação na Música. Poderíamos estender essa aplicação para a Biologia, por exemplo. Comentando sobre as cordas vocais e os tímpanos. Entretanto, optamos por não estender. Dado que exigiria uma pesquisa mais detalhada no campo e fugiria aos limites desta proposta.

Esperamos que com a nossa tentativa de ensinar osciladores deixemos nossa contribuição para o intenso e atual debate sobre o Ensino Médio.

## REFERÊNCIAS

- [1] Vídeo: Oscilações; Almeida M. A. T. e outros, 2000.
- [2] Vídeo: Pêndulos Acoplados, Almeida M. A. T., Pinheiro F. S. e outros, 2012.
- [3] Vídeo: Osciladores Forçados, Almeida M. A. T., Pinheiro F. S. e outros, 2012.
- [4] Almeida, M. A. T., Barrosos, Marta Feijó, “Oscilações: Coerência e Ressonância”, publicado nos anais da VII Conferência Inter-Americana sobre Educação em Física. 2000.
- [5] French A.P. Vibrations and Waves. The M.I.T. Introductory Physics Series. 1971. W .W . Norton & Company. inc. New York.
- [6] Nussenzveig H. M. Curso de Física Básica. Vol. 1 e 2. 2006. Editora Edgard Blücher.

## APÊNDICE 1 – MHS

### PÊNDULO SIMPLES

Vamos obter a posição  $(\theta(t))$  e a velocidade  $(v(t))$  como funções do tempo por meio de equações diferenciais. Com efeito, vamos reescrever a expressão da aceleração tangencial do pêndulo para pequenos ângulos obtida no texto

$$a_{\theta} = -g \cdot \theta \quad (1)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \theta$$

fazendo a substituição

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

a equação pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \cdot \theta = 0 \quad (2).$$

Essa equação (2) é chamada de equação do oscilador harmônico unidimensional. Esta é uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea. No texto mostramos que  $\theta(t)$  para pequenos ângulos é uma função harmônica. Com efeito, vamos substituir na equação do oscilador (2) a função cosseno  $\theta(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta)$  (3) e confirmar sua validade

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} [A \cdot \cos(\omega t + \delta)] + \omega^2 (A \cdot \cos(\omega t + \delta)) &= \\ = -\omega^2 (A \cdot \cos(\omega t + \delta)) + \omega^2 (A \cdot \cos(\omega t + \delta)) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a função cosseno é de fato uma possível solução de (2). Por meio de (3) podemos deduzir a expressão para a velocidade do pêndulo em função do tempo. Basta derivá-la,

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + \delta) \\ v(t) &= -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + \delta)\end{aligned}\quad (4).$$

Determinamos a posição e a velocidade do pêndulo em função do tempo. Agora, vamos determinar seu período ( $\tau$ ) de oscilação. A definição física de período consiste no menor intervalo de tempo para que o oscilador repita a mesma situação física, ou seja, assuma os mesmos valores para a velocidade e para a posição. Isto é,

$$\begin{aligned}v(t + \tau) &= v(t) \\ \theta(t + \tau) &= \theta(t).\end{aligned}$$

Aplicando as condições acima nas funções, temos

$$\begin{aligned}-\omega \cdot A \cdot \text{sen}[\omega(t + \tau) + \delta] &= -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + \delta) \\ A \cdot \cos[\omega(t + \tau) + \delta] &= A \cdot \cos(\omega t + \delta)\end{aligned}$$

para que as expressões sejam verdadeiras, temos que impor a seguinte condição sobre os argumentos das funções

$$[\omega(t + \tau) + \delta] - (\omega t + \delta) = 2 \cdot n \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

substituindo  $n = 1$ , temos

$$\omega \cdot \tau = 2\pi$$

portanto, podemos escrever o período do pêndulo para pequenas amplitudes como

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{g}} \quad (5).$$

## SISTEMA MOLA - MASSA - MOLA

Para o sistema massa-mola vamos determinar sua posição e sua velocidade como funções do tempo por analogia com problema do pêndulo simples. Com efeito, vamos reescrever a aceleração da massa para pequenos deslocamentos obtida no texto

$$\begin{aligned}a_x &= -\frac{2.k}{m} \cdot x \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{2.k}{m} \cdot x\end{aligned}\tag{6}$$

fazendo a substituição de (7) em (6)

$$\omega^2 = \frac{2.k}{m}\tag{7}$$

temos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \cdot x = 0\tag{8}.$$

Esta equação é a equação do oscilador harmônico unidimensional. Portanto, sabemos que (8) possui como possível solução a função cosseno. Isto confirma a equação para a posição da massa obtida no texto.

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cdot \cos(\omega t + \delta) \\ (9).\end{aligned}$$

Para obtermos a velocidade da massa em função do tempo, basta derivar (9)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \delta)\tag{10}.$$

Para o período de oscilação da massa, basta substituir as constantes,

$$\tau = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{2k}} \quad (11).$$

## APÊNDICE 2 – MODOS NORMAIS DE OSCILAÇÃO

### PÊNDULOS ACOPLADOS

Vamos resolver o problema dos pêndulos acoplados utilizando equações diferenciais para deduzirmos as frequências dos modos normais e a solução geral do problema. Com efeito, vamos reescrever o sistema de equações acopladas encontrado no texto (1) e (2) que descreve o movimento dos pêndulos

$$a_{1x} = -\frac{g}{l} \cdot x_1 + \frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$a_{2x} = -\frac{g}{l} \cdot x_2 - \frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_1) \quad (2).$$

vamos reescrever utilizando as equações diferenciais,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\frac{g}{l} \cdot x_1 + \frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_1) \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\frac{g}{l} \cdot x_2 - \frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Para resolvermos este sistema, vamos somar e subtrair as equações

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot (x_1 + x_2) \quad (3)$$

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right) \cdot (x_1 - x_2) \quad (4).$$

Podemos notar que as equações (3) e (4) são as equações do oscilador harmônico unidimensional para as coordenadas  $(x_1 + x_2)$  e  $(x_1 - x_2)$ . Assim, podemos fazer uma substituição de variáveis,

$$q_1 = x_1 + x_2 \quad (5)$$

$$q_2 = x_1 - x_2 \quad (6).$$

portanto,

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot q_1 = 0$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \left( \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right) \cdot q_2 = 0$$

realizando as substituições

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega'^2 = \left( \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right)$$

temos o novo sistema

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega^2 \cdot q_1 = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega'^2 \cdot q_2 = 0 \quad (8).$$

Podemos notar que nessas coordenadas o sistema se desacopla, isto é, as acelerações são independentes. Essas coordenadas são chamadas de **coordenadas normais**. As soluções de (7) e (8) definem o que chamamos de modos normais, nos quais os pêndulos oscilam harmonicamente. Portanto, os modos normais são dados pelas equações

$$q_1 = A \cdot \cos(\omega t + \delta_1)$$

(9)

$$q_2 = B \cdot \cos(\omega' t + \delta_2) \quad (10).$$

Pela transformação de coordenadas (5) e (6), a solução geral do movimento dos pêndulos é dada por

$$x_1(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos(\omega t + \delta_1) + \frac{B}{2} \cdot \cos(\omega' t + \delta_2) \quad (11)$$

$$x_2(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos(\omega t + \delta_1) - \frac{B}{2} \cdot \cos(\omega' t + \delta_2) \quad (12).$$

Podemos notar que as soluções obtidas (11, 12) são combinações lineares das coordenadas normais que são linearmente independentes. Logo, pela teoria das equações diferenciais a solução obtida é a solução geral do sistema de equações diferenciais dos pêndulos acoplados. As frequências angulares dos modos normais são:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (13)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} \quad (14).$$

Estes resultados confirmam o que encontramos no texto. Dois modos normais cuja superposição nos fornece o movimento geral dos dois pêndulos acoplados, com frequências bem definidas dadas por (13) e (14).

## SISTEMA MASSA-MOLA ACOPLADO

Vamos resolver o sistema massa-mola acoplado através de equações diferenciais. Vamos reescrever as acelerações encontradas no texto e fazer uma analogia com o caso dos pêndulos acoplados. As acelerações são dadas por

$$a_{1y} = -\frac{T}{m.l} \cdot y_1 + \frac{T}{m.l} \cdot (y_2 - y_1)$$

$$a_{2y} = -\frac{T}{m.l} \cdot y_2 - \frac{T}{m.l} \cdot (y_2 - y_1)$$

reescrevendo segundo as equações diferenciais

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{T}{m.l} \cdot y_1 + \frac{T}{m.l} \cdot (y_2 - y_1) \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{T}{m.l} \cdot y_2 - \frac{T}{m.l} \cdot (y_2 - y_1) \quad (2).$$

De maneira semelhante ao caso dos pêndulos acoplados, vamos somar e subtrair as equações (1) e (2).

$$\frac{d^2 (y_1 + y_2)}{dt^2} = -\frac{T}{m.l} \cdot (y_1 + y_2) \quad (3)$$

$$\frac{d^2 (y_1 - y_2)}{dt^2} = -\frac{3T}{m.l} \cdot (y_1 - y_2) \quad (4).$$

Vamos fazer agora a seguinte mudanças de variáveis

$$q_1 = y_1 + y_2 \quad (5)$$

$$q_2 = y_1 - y_2 \quad (6)$$

e realizar as substituições

$$\omega^2 = \frac{T}{m.l} \quad (7)$$

$$\omega'^2 = \frac{3T}{m.l} \quad (8)$$

Chegamos, então, às equações

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega^2 \cdot q_1 = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega'^2 \cdot q_2 = 0 \quad (10).$$

As equações mostram que nessas coordenadas o sistema se desacopla de maneira semelhante ao caso dos pêndulos acoplados. Assim, as soluções desse sistema são dadas por

$$q_1 = A \cdot \cos(\omega t + \delta_1) \quad (11)$$

$$q_2 = B \cdot \cos(\omega' t + \delta_2) \quad (12).$$

Pela mudança de coordenadas (5) e (6), conseguimos obter a solução do movimento das massas.

$$x_1(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos(\omega t + \delta_1) + \frac{B}{2} \cdot \cos(\omega' t + \delta_2) \quad (13)$$

$$x_2(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos(\omega t + \delta_1) - \frac{B}{2} \cdot \cos(\omega' t + \delta_2) \quad (14).$$

Estas equações (13) e (14) confirmam os resultados obtidos no caso dos pêndulos acoplados. Dois modos normais cuja superposição fornece o movimento geral dos osciladores.

### APÊNDICE 3 – RESSONÂNCIA

Através das equações diferenciais dos movimentos dos pêndulos, vamos fazer um tratamento mais geral do fenômeno da ressonância. Com esta finalidade, vamos aplicar uma força externa periódica a um dos suportes dos pêndulos, conforme mostra o texto (Fig.28) e o vídeo [2].

$$\vec{F}(t) = F_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \hat{x} \quad (1)$$

Onde o vetor unitário  $\hat{x}$  indica a direção positiva do eixo  $Ox$ . Para simplificar o problema vamos desprezar a resistência do ar e os possíveis atritos. Após um intervalo de tempo muito maior que o período, os pêndulos tendem a oscilar com a frequência constante da força externa, assim, praticamente não há dissipação de energia, portanto desprezar os atritos se mostra uma boa aproximação.

Vamos obter as acelerações dos pêndulos. Aplicando a Segunda Lei de Newton em um instante após algumas oscilações completas da força externa, vamos obter para cada uma das massas, equações análogas ao caso da ausência de força externa obtidas no texto (26) e (27). Basta acrescentar a força externa (1) à equação (26).

$$P_{1\theta} + F_\theta + F_0 \cos(\omega_0 t) = m \cdot a_{1\theta} \quad (2)$$

$$P_{2\theta} - F_\theta = m \cdot a_{2\theta} \quad (3).$$

As equações (1) e (2) nos levam às acelerações

$$a_{1x} = -\frac{g}{l} \cdot x_1 - \frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t) \quad (4)$$

$$a_{2x} = -\frac{g}{l} \cdot x_2 + \frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_1) \quad (5).$$

Inicialmente a frequência de oscilação dos pêndulos não coincide com a frequência da força externa, regime chamado de **transiente**. Após muitos períodos completos da força

externa, os pêndulos adquirem a mesma frequência desta força e assim permanecem. Regime chamado de **estacionário**.

Como a força externa é uma função harmônica do tempo, no regime estacionário esperamos que as posições dos pêndulos sejam descritas também por funções harmônicas, dado que oscilam na sua frequência. Este resultado foi confirmado nos vídeos [2] e [3]. Com efeito, reescrevendo as equações para a notação diferencial

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot x_1 - \frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t) \quad (6)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot x_2 + \frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_1) \quad (7).$$

Para resolvermos esse sistema, de maneira semelhante ao caso das oscilações livres, vamos somar e subtrair as equações (6) e (7)

$$\frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot (x_1 + x_2) + \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (8)$$

$$\frac{d^2 (x_1 - x_2)}{dt^2} = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right) \cdot (x_1 - x_2) + \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (9).$$

Realizando a mesma mudança de coordenadas no caso dos pêndulos acoplados e oscilando livremente,

$$q_1 = x_1 + x_2 \quad (10)$$

$$q_2 = x_1 - x_2 \quad (11)$$

e as substituições

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega'^2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)$$

as equações se reduzem a

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega^2 \cdot q_1 = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (12)$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega^2 \cdot q_2 = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (13).$$

Estas são equações diferenciais lineares não-homogêneas. As soluções gerais são dadas pela soma de duas soluções linearmente independentes, uma solução particular com a solução da equação homogênea associada.

$$q_i(t) = q_{ih}(t) + q_{ip}(t)$$

A equação homogênea é a equação do oscilador harmônico unidimensional, suas soluções  $(q_{1h}(t); q_{2h}(t))$  são nossas conhecidas.

$$q_{1h}(t) = A_1 \cdot \cos(\omega t) \quad (14)$$

$$q_{2h}(t) = A_2 \cdot \cos(\omega' t) \quad (15).$$

Para facilitar escolhemos a fase inicial nula ( $\delta = 0$ ). Precisamos agora, encontrar uma solução particular. Vamos testar

$$q_{ip}(t) = B_i \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Para facilitar escolhemos a fase inicial nula ( $\delta = 0$ ). Substituindo nas equações (12), temos

$$\frac{d^2 (B_1 \cdot \cos(\omega_0 t))}{dt^2} + \omega^2 \cdot B_1 \cdot \cos(\omega_0 t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$-\omega_0^2 \cdot B_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + \omega^2 \cdot B_1 \cdot \cos(\omega_0 t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega_0 t)$$

encontramos, então, a amplitude

$$B_1 = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (16).$$

De maneira análoga, encontramos a amplitude para a outra coordenada

$$B_2 = \frac{F_0/m}{\omega'^2 - \omega_0^2} \quad (17).$$

Dessa forma, podemos escrever a solução geral das equações (12) e (13).

$$q_1(t) = A_1 \cdot \cos(\omega t) + \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (18)$$

$$q_2(t) = A_2 \cdot \cos(\omega' t) + \frac{F_0/m}{\omega'^2 - \omega_0^2} \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (19).$$

Estamos interessados na solução estacionária. Quando a frequência de oscilação dos pêndulos se igualam à frequência da força externa ( $\omega_0$ ).

$$q_1(t) = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (20)$$

$$q_2(t) = \frac{F_0/m}{\omega'^2 - \omega_0^2} \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (21).$$

As equações (20) e (21) confirmam o resultado obtido nos vídeos [2] e [3]. Quando a frequência da força externa se aproxima das frequências dos modos normais, a amplitude máxima de oscilação cresce muito rápido. Ou seja, a melhor resposta dos pêndulos acontece quando a frequência externa se aproxima das frequências dos modos normais. O gráfico de  $B_1(\omega_0)$  está representado na Fig.33. Lembrando que para  $B_2(\omega_0)$  o gráfico é análogo e não será feito.

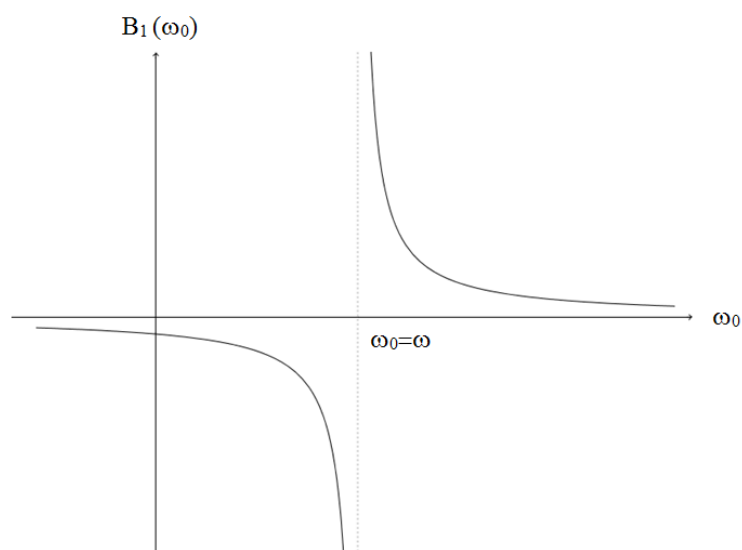


Fig.33 – Gráfico de  $B_1(\omega_0)$ .

## APÊNDICE 4

O gráfico e a Tabela 1 do movimento geral dos pêndulos acoplados foi construído com pontos obtidos com aplicativo ImageJ. Utilizamos neste programa uma sequência de imagens capturadas com aplicativo VirtualDub. O vídeo capturado tinha imagens com dimensões de  $(320 \times 213) \text{ px}$ . O vídeo foi produzido com 30 imagens por segundo. Logo, o intervalo entre duas imagens consecutivas do vídeo era de  $\frac{1}{30} \text{ s}$ . No programa ImageJ utilizamos apenas as imagens ímpares da sequência capturada no VirtualDub. Por isto, o intervalo de tempo entre duas imagens consecutivas da sequência utilizada no ImageJ foi de  $\frac{2}{30} \text{ s}$ . Na Tabela 1 numeramos as imagens da sequência utilizada no ImageJ de 0 até 572. A Fig.26.1 repetida a seguir mostra uma destas imagens. Nelas foram marcados a origem  $O$  do sistema de eixos coordenados e o ponto  $P$  cujas coordenadas o programa forneceu. Denominamos o eixo horizontal de eixo  $Ox$  e o eixo vertical de  $Oy$ .

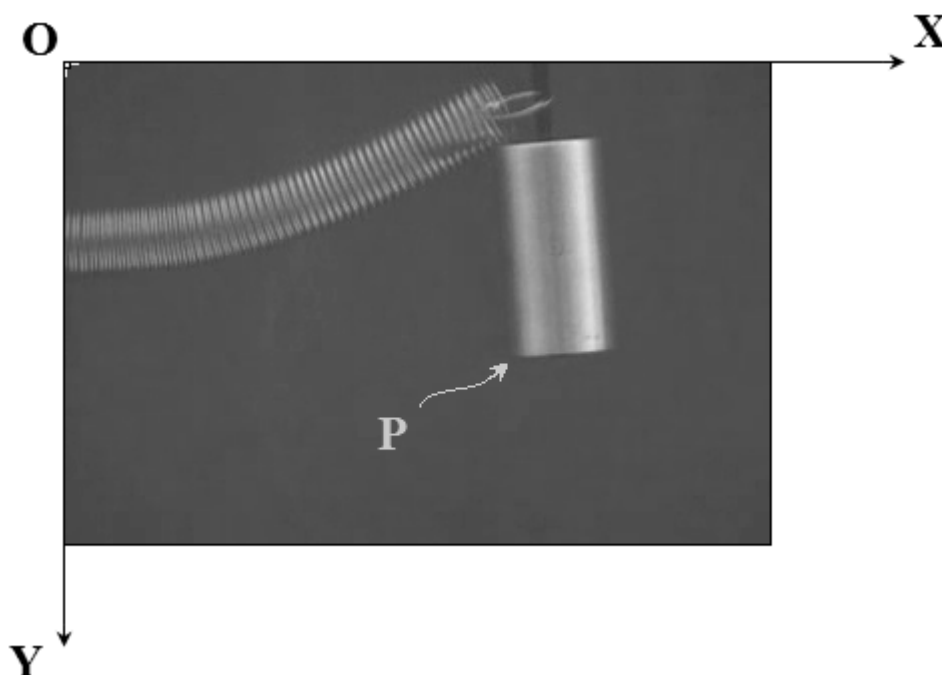


Fig.26.1 - Imagem usada no ImageJ.

Na Tabela 1 foram colocados o número ( $N$ ) da imagem e a coordenada ( $x$ ) do ponto  $P$  da imagem  $N$  em  $\text{px}$  (pixels). O tempo correspondente à posição do ponto  $P$  da imagem  $N$  é dado por:

$$t_N = \frac{2N}{30} s .$$

A Fig.26.2 repetida a seguir mostra o gráfico obtido com a Tabela 1. Na abscissa foram colocados o número da imagem da sequência utilizada ImageJ e na ordenada a posição do ponto P em pixels.

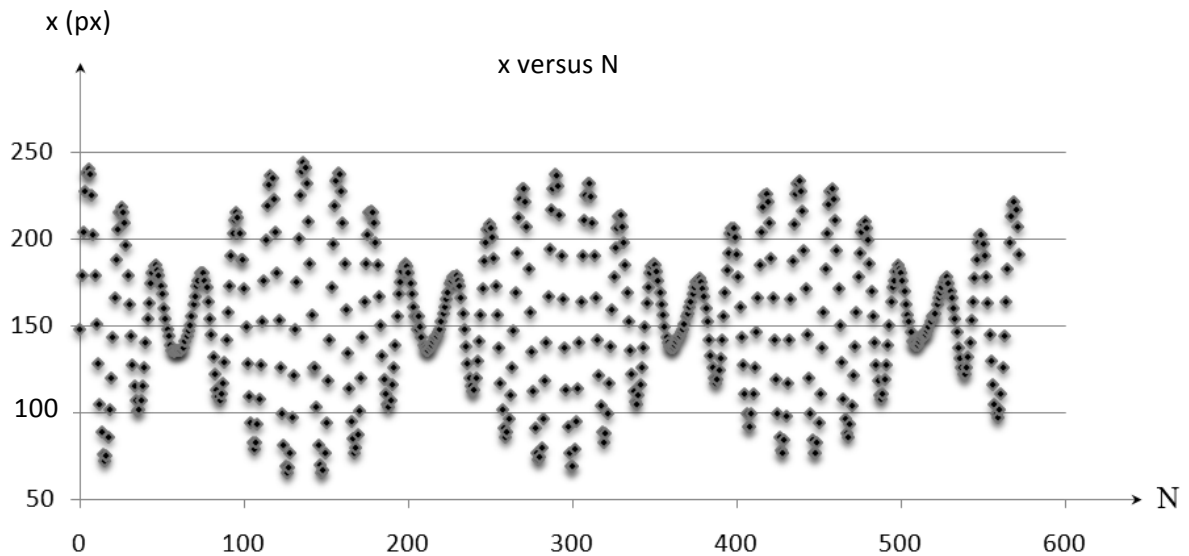


Fig.26-2 – Gráfico de  $x_1(t)$  obtido pelos programas através do vídeo.

Para estimar o período rápido localizamos da figura pontos próximos aos máximos. Refinamos estes pontos utilizando a Tabela 1. Na Tabela 2 estão estes pontos localizados.

|   | Intervalo 1 |        | Intervalo 2 |        | Intervalo 3 |        |
|---|-------------|--------|-------------|--------|-------------|--------|
|   | 110<N<200   |        | 210<N<350   |        | 350<N<500   |        |
|   | N           | x (px) | N           | x (px) | N           | x (px) |
| 1 | 95          | 215    | 249         | 208    | 397         | 206    |
| 2 | 177         | 215    | 329         | 214    | 478         | 210    |

Tabela - 2.

O número de períodos entre os pontos de máximo de cada intervalo da Tabela - 2 é quatro. O número de imagens entre dois máximos no primeiro intervalo é 82, no segundo intervalo 80 e no terceiro intervalo 81. Para estimar o período rápido vamos escolher o número de imagens igual a 81 com uma incerteza de uma imagem, isto é,

$$\tau_r = \left( \frac{2 \times 81}{30} \pm \frac{2}{30} \right) s = (1,35 \pm 0,07) s.$$

Para estimar o período de amplitude localizamos na figura pontos próximos aos dois máximos de amplitude consecutivos. Refinamos estes pontos utilizando a Tabela - 1. Estes pontos estão na Tabela - 3.

| N   | x(px) |
|-----|-------|
| 136 | 244   |
| 438 | 233   |

Tabela - 3.

Logo o período de amplitude estimado é de

$$\tau_a = \left( \frac{2 \times 302}{30} \pm \frac{2}{30} \right) s = (20,13 \pm 0,07) s.$$

Tabela - 1

| N  | x   | N  | x   | N   | x   | N   | x   | N   | x   | N   | x   | N   | x   |
|----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0  | 148 | 46 | 185 | 92  | 190 | 138 | 232 | 184 | 133 | 230 | 176 | 276 | 112 |
| 1  | 179 | 47 | 182 | 93  | 203 | 139 | 210 | 185 | 119 | 231 | 173 | 277 | 91  |
| 2  | 204 | 48 | 179 | 94  | 211 | 140 | 186 | 186 | 111 | 232 | 166 | 278 | 77  |
| 3  | 227 | 49 | 173 | 95  | 215 | 141 | 156 | 187 | 105 | 233 | 157 | 279 | 73  |
| 4  | 238 | 50 | 168 | 96  | 212 | 142 | 126 | 188 | 103 | 234 | 148 | 280 | 74  |
| 5  | 240 | 51 | 160 | 97  | 203 | 143 | 126 | 189 | 107 | 235 | 138 | 281 | 80  |
| 6  | 237 | 52 | 154 | 98  | 188 | 144 | 103 | 190 | 116 | 236 | 128 | 282 | 96  |
| 7  | 225 | 53 | 148 | 99  | 188 | 145 | 81  | 191 | 126 | 237 | 120 | 283 | 118 |
| 8  | 202 | 54 | 144 | 100 | 171 | 146 | 70  | 192 | 139 | 238 | 115 | 284 | 140 |
| 9  | 179 | 55 | 139 | 101 | 149 | 147 | 65  | 193 | 155 | 239 | 112 | 285 | 167 |
| 10 | 151 | 56 | 136 | 102 | 128 | 148 | 67  | 194 | 168 | 240 | 113 | 286 | 194 |
| 11 | 128 | 57 | 135 | 103 | 109 | 149 | 77  | 195 | 175 | 241 | 120 | 287 | 217 |
| 12 | 105 | 58 | 136 | 104 | 94  | 150 | 94  | 196 | 181 | 242 | 130 | 288 | 229 |
| 13 | 89  | 59 | 136 | 105 | 83  | 151 | 118 | 197 | 184 | 243 | 141 | 289 | 237 |
| 14 | 76  | 60 | 136 | 106 | 79  | 152 | 142 | 198 | 186 | 244 | 156 | 290 | 236 |
| 15 | 72  | 61 | 136 | 107 | 83  | 153 | 172 | 199 | 184 | 245 | 171 | 291 | 230 |
| 16 | 75  | 62 | 137 | 108 | 93  | 154 | 197 | 200 | 180 | 246 | 187 | 292 | 214 |
| 17 | 86  | 63 | 137 | 109 | 108 | 155 | 219 | 201 | 174 | 247 | 198 | 293 | 190 |
| 18 | 102 | 64 | 141 | 110 | 127 | 156 | 233 | 202 | 168 | 248 | 205 | 294 | 165 |
| 19 | 120 | 65 | 144 | 111 | 152 | 157 | 238 | 203 | 161 | 249 | 208 | 295 | 137 |
| 20 | 143 | 66 | 147 | 112 | 176 | 158 | 237 | 204 | 155 | 250 | 206 | 296 | 113 |
| 21 | 166 | 67 | 150 | 113 | 199 | 159 | 227 | 205 | 148 | 251 | 201 | 297 | 92  |
| 22 | 188 | 68 | 155 | 114 | 219 | 160 | 209 | 206 | 155 | 252 | 189 | 298 | 77  |
| 23 | 205 | 69 | 162 | 115 | 231 | 161 | 186 | 207 | 149 | 253 | 173 | 299 | 69  |
| 24 | 215 | 70 | 167 | 116 | 236 | 162 | 159 | 208 | 143 | 254 | 156 | 300 | 69  |
| 25 | 218 | 71 | 173 | 117 | 235 | 163 | 134 | 209 | 139 | 255 | 137 | 301 | 79  |
| 26 | 215 | 72 | 176 | 118 | 223 | 164 | 114 | 210 | 137 | 256 | 117 | 302 | 95  |
| 27 | 209 | 73 | 180 | 119 | 204 | 165 | 95  | 211 | 136 | 257 | 102 | 303 | 114 |
| 28 | 196 | 74 | 180 | 120 | 180 | 166 | 85  | 212 | 136 | 258 | 91  | 304 | 140 |
| 29 | 179 | 75 | 180 | 121 | 153 | 167 | 77  | 213 | 137 | 259 | 86  | 305 | 164 |
| 30 | 162 | 76 | 176 | 122 | 126 | 168 | 80  | 214 | 139 | 260 | 89  | 306 | 190 |
| 31 | 144 | 77 | 172 | 123 | 99  | 169 | 87  | 215 | 141 | 261 | 96  | 307 | 211 |
| 32 | 127 | 78 | 164 | 124 | 81  | 170 | 101 | 216 | 143 | 262 | 110 | 308 | 225 |
| 33 | 115 | 79 | 154 | 125 | 69  | 171 | 120 | 217 | 144 | 263 | 126 | 309 | 232 |
| 34 | 107 | 80 | 145 | 126 | 65  | 172 | 143 | 218 | 146 | 264 | 147 | 310 | 232 |
| 35 | 101 | 81 | 132 | 127 | 68  | 173 | 164 | 219 | 148 | 265 | 169 | 311 | 224 |
| 36 | 102 | 82 | 122 | 128 | 77  | 174 | 186 | 220 | 152 | 266 | 192 | 312 | 209 |
| 37 | 107 | 83 | 113 | 129 | 97  | 175 | 202 | 221 | 157 | 267 | 212 | 313 | 190 |
| 38 | 115 | 84 | 109 | 130 | 121 | 176 | 215 | 222 | 161 | 268 | 223 | 314 | 166 |
| 39 | 126 | 85 | 107 | 131 | 148 | 177 | 216 | 223 | 165 | 269 | 229 | 315 | 142 |
| 40 | 140 | 86 | 111 | 132 | 175 | 178 | 215 | 224 | 169 | 270 | 229 | 316 | 121 |
| 41 | 154 | 87 | 117 | 133 | 200 | 179 | 209 | 225 | 174 | 271 | 221 | 317 | 104 |
| 42 | 163 | 88 | 129 | 134 | 225 | 180 | 198 | 226 | 176 | 272 | 207 | 318 | 89  |
| 43 | 174 | 89 | 142 | 135 | 239 | 181 | 185 | 227 | 178 | 273 | 183 | 319 | 83  |
| 44 | 180 | 90 | 158 | 136 | 244 | 182 | 167 | 228 | 178 | 274 | 158 | 320 | 88  |
| 45 | 184 | 91 | 173 | 137 | 241 | 183 | 150 | 229 | 179 | 275 | 135 | 321 | 99  |

Tabela - 1

| N   | x   | N   | x   | N   | x   | N   | x   | N   | x   | N   | x   | N   | x   |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 322 | 117 | 359 | 138 | 396 | 203 | 433 | 165 | 470 | 104 | 507 | 141 | 543 | 153 |
| 323 | 138 | 360 | 137 | 397 | 206 | 434 | 187 | 471 | 121 | 508 | 140 | 544 | 164 |
| 324 | 159 | 361 | 137 | 398 | 206 | 435 | 208 | 472 | 138 | 509 | 139 | 545 | 177 |
| 325 | 178 | 362 | 139 | 399 | 201 | 436 | 226 | 473 | 158 | 510 | 139 | 546 | 188 |
| 326 | 195 | 363 | 141 | 400 | 164 | 437 | 232 | 474 | 178 | 511 | 141 | 547 | 198 |
| 327 | 206 | 364 | 143 | 401 | 178 | 438 | 233 | 475 | 192 | 512 | 143 | 548 | 202 |
| 328 | 213 | 365 | 144 | 402 | 161 | 439 | 227 | 476 | 204 | 513 | 145 | 549 | 202 |
| 329 | 214 | 366 | 146 | 403 | 143 | 440 | 216 | 477 | 208 | 514 | 145 | 550 | 197 |
| 330 | 207 | 367 | 148 | 404 | 127 | 441 | 193 | 478 | 210 | 515 | 145 | 551 | 190 |
| 331 | 198 | 368 | 151 | 405 | 111 | 442 | 171 | 479 | 206 | 516 | 147 | 552 | 178 |
| 332 | 185 | 369 | 155 | 406 | 99  | 443 | 145 | 480 | 199 | 517 | 149 | 553 | 163 |
| 333 | 169 | 370 | 157 | 407 | 92  | 444 | 120 | 481 | 186 | 518 | 152 | 554 | 145 |
| 334 | 152 | 371 | 161 | 408 | 92  | 445 | 99  | 482 | 170 | 519 | 155 | 555 | 130 |
| 335 | 136 | 372 | 164 | 409 | 99  | 446 | 84  | 483 | 155 | 520 | 156 | 556 | 116 |
| 336 | 122 | 373 | 168 | 410 | 111 | 447 | 77  | 484 | 140 | 521 | 157 | 557 | 105 |
| 337 | 112 | 374 | 172 | 411 | 126 | 448 | 77  | 485 | 127 | 522 | 162 | 558 | 99  |
| 338 | 106 | 375 | 175 | 412 | 146 | 449 | 83  | 486 | 118 | 523 | 166 | 559 | 97  |
| 339 | 105 | 376 | 176 | 413 | 166 | 450 | 94  | 487 | 110 | 524 | 169 | 560 | 102 |
| 340 | 110 | 377 | 177 | 414 | 185 | 451 | 111 | 488 | 108 | 524 | 169 | 561 | 111 |
| 341 | 116 | 378 | 175 | 415 | 204 | 452 | 137 | 489 | 111 | 525 | 172 | 562 | 126 |
| 342 | 126 | 379 | 171 | 416 | 218 | 453 | 158 | 490 | 119 | 526 | 175 | 563 | 144 |
| 343 | 137 | 380 | 167 | 417 | 225 | 454 | 183 | 491 | 127 | 527 | 177 | 564 | 164 |
| 344 | 149 | 381 | 160 | 418 | 226 | 455 | 203 | 492 | 139 | 528 | 178 | 565 | 183 |
| 345 | 163 | 382 | 152 | 419 | 221 | 456 | 220 | 493 | 150 | 529 | 174 | 566 | 198 |
| 346 | 172 | 383 | 142 | 420 | 209 | 457 | 227 | 494 | 164 | 530 | 170 | 567 | 213 |
| 347 | 180 | 384 | 133 | 421 | 189 | 458 | 229 | 495 | 172 | 531 | 166 | 568 | 220 |
| 348 | 184 | 385 | 126 | 422 | 166 | 459 | 223 | 496 | 176 | 532 | 160 | 569 | 221 |
| 349 | 186 | 386 | 120 | 423 | 142 | 460 | 211 | 497 | 181 | 533 | 154 | 570 | 217 |
| 350 | 185 | 387 | 117 | 424 | 119 | 461 | 193 | 498 | 185 | 534 | 146 | 571 | 207 |
| 351 | 181 | 388 | 119 | 425 | 99  | 462 | 171 | 499 | 183 | 535 | 137 | 572 | 191 |
| 352 | 176 | 389 | 124 | 426 | 86  | 463 | 150 | 500 | 180 | 536 | 131 |     |     |
| 353 | 169 | 390 | 131 | 427 | 78  | 464 | 129 | 501 | 176 | 537 | 126 |     |     |
| 354 | 162 | 391 | 142 | 428 | 77  | 465 | 108 | 502 | 170 | 538 | 122 |     |     |
| 355 | 156 | 392 | 155 | 429 | 84  | 466 | 96  | 503 | 162 | 539 | 122 |     |     |
| 356 | 149 | 393 | 169 | 430 | 98  | 467 | 88  | 504 | 156 | 540 | 126 |     |     |
| 357 | 143 | 394 | 182 | 431 | 117 | 468 | 86  | 505 | 152 | 541 | 132 |     |     |
| 358 | 140 | 395 | 192 | 432 | 142 | 469 | 93  | 506 | 146 | 542 | 140 |     |     |